Leçon 102 : Groupe des nombres complexes de module 1. Racines de l'unité. Applications.

1 De l'exponentielle au groupe $\mathbb{U}$

1.1 Prérequis autour de l'exponentielle

Proposition 1 (TL1 272, TAU 11/43, GOU 254)**.** La série $\sum \frac{z^n}{n!}$ a pour rayon de convergence $R = +\infty$.

Définition 2 (TL1 272, TAU 11/43, GOU 254)**.** On définit la fonction exponentielle complexe comme la somme de la série, $\sum \frac{z^n}{n!}$ que l'on note $exp(z)$ ou e^z. C'est-à-dire : $\forall z \in \mathbb{C}$, $e^z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

Proposition 3 (TAU 43)**.** La fonction exponentielle est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{C}$ et admet pour dérivée e^z en tout point $z \in \mathbb{C}$.

Proposition 4. $\forall z, z' \in \mathbb{C}, e^{z+z'} = e^z e^{z'}$

Proposition 5 (TAU43)**.** $\forall z \in \mathbb{C}$, $exp(\overline{z}) = \overline{exp(z)}$, $(e^z)^{-1} = e^{-z}$ $|e^z| = e^{Re(z)}$

Proposition 6 (TAU 43)**.** $|e^z| = 1 \iff z \in i\mathbb{R}$

Théorème 7 (TAU 44)**.** L'exponentielle complexe est un morphisme de $(\mathbb{C}, +)$ sur $(\mathbb{C}, \times)$ surjectif.

Définition 8 (TAU 45, TL1 273)**.** On appelle cosinus et sinus les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies respectivement par :

1. $\cos(t) := Re(e^{it})$
2. $\sin(t) := Im(e^{it})$

Proposition 9 (TAU 45)**.** Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\cos(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!}$, $\sin(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}$

Corollaire 10 (Un peu TL1 273)**.** Les fonctions cos et sin sont continues et indéfiniment dérivable sur $\mathbb{C}$.

Proposition 11 (TL1 265)**.** [Formule d'Euler] Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x) = \frac{e^{ix}+e^{-it}}{2}$ et $\sin(x) = \frac{e^{ix}-e^{-it}}{2i}$

Proposition 12 (TL1 267)**.** [Formule de Moivre] $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $e^{int} = (e^{it})^n$

Remarque 13 (No ref)**.** Cette égalité est fausse si n n'est pas un entier, on peut le voir avec le contre-exemple : $e^{\frac{i2\pi}{2}} = -1 \neq 1 = (e^{2i\pi})^{1/2}$

Corollaire 14 (TL1 267)**.** $\forall t \in \mathbb{R}, \cos(int) + i\sin(int) = (\cos(t) + i\sin(t))^n$. Application : polynôme de Tchebychef

Corollaire 15 (TAU 45)**.** $\forall t \in \mathbb{R}, \cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$

1.2 Le groupe des nombres complexes de module 1

Définition 16 (TL1 257)**.** On appelle cercle trigonométrique (ou cercle unité) de $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1 : $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} | |z| = 1\}$.

Exemple 17 (No ref)**.** 1,i, -1, $-i$ sont des éléments de $\mathbb{U}$.

Proposition 18 (TAU 44)**.** $e^{iz} \in \mathbb{U} \iff z \in \mathbb{R}$

Proposition 19 (TL1 257)**.** Le cercle unité est un sous-groupe du groupe multiplicatif $\mathbb{C}^*$.

Théorème 20 (TAU 44)**.** INSISTER fort sur cet iso à l'oral car l'origine de la partie sur les angles L'application $t \mapsto e^{it}$ est un morphisme surjectif du groupe $(\mathbb{R}, +)$ sur $(\mathbb{U}, \times)$. Le plus petit réel strictement positif t qui vérifie $e^{it} = 1$ est noté 2π.

2 Sous-groupes des racines de l'unité

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Définition 21 (TL1 258)**.** On appelle racine $n-$ième de l'unité tout nombre complexe z tel que $z^n = 1$.

Notation 22. $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racine $n-$ième de l'unité

Proposition 23 (TL1 258)**.** Si p est multiple de n, $\mathbb{U}_n \subset \mathbb{U}_p$

Exemple 24 (TL1 259)**.** $\mathbb{U}_1 = \{1\}$; $\mathbb{U}_2 = \{-1, 1\}; U_4 = \{-1, 1, i, -i\}$. Pour déterminer $\mathbb{U}_3$, on cherche à résoudre $z^3 = 1$, i.e. $z^3 - 1 = 0$, i.e. $(z-1)(z^2+z+1) = 0$. On a donc $1 \in \mathbb{U}_3$ et une étude de polynôme nous donne $\mathbb{U}_3 = \{1, e^{i2\pi/3}, e^{i4\pi/3}\}$.

Définition 25 (TL2 258)**.** Une racine de l'unité est une racine $n$ième de l'unité pour un $n \in \mathbb{N}^*$ au moins.

Notation 26. On note $\mathbb{U}_\infty$ l'ensemble des racines de l'unité.

Proposition 27 (TL1 258)**.** $\mathbb{U}_\infty = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{U}_n$

Proposition 28 (TL1 260)**.** $\mathbb{U}_n$ est un sous-groupe cyclique de $\mathbb{U}$. Ses éléments sont les $e^{\frac{2ki\pi}{n}}$, où k parcourt les entiers modulo n : $\mathbb{U}_n = \{e^{\frac{2ki\pi}{n}} | k \in [\![0, n-1]\!]\}$

Exemple 29 (TL1 260)**.** Le groupe $\mathbb{U}_6$ est engenré par $e^{2i\pi/6} = e^{i\pi/3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Corollaire 30 (TL1 260)**.** Les seuls sous-groupes finis de $\mathbb{C}^*$ sont les $\mathbb{U}_n$

3 Applications

3.1 Polynômes cyclotomiques

Définition 31 (TL1 260, ou PER 80)**.** Une racine primitive $n$ème de l'unité est un générateur de $\mathbb{U}_n$

Notation 32. On note $\mathbb{U}_n^*$ l'ensemble des racines primitives $n-$ème de l'unité.

Exemple 33 (No ref)**.** $-1 \in \mathbb{U}_4$ mais ce n'est pas une racine primitive 4ème car $< -1 >= \{1, -1\}$. C'est cependant une racine 2ème de l'unité

Proposition 34 (TL1 260, un peu)**.** Les générateur de $\mathbb{U}_n$ sont les $e^{i2k\pi/n}$ où $k \in [\![1, n-1]\!]$ et $k \wedge n = 1$. Ainsi, $|\mathbb{U}_n^*| = \varphi(n)$, où φ est l'indicatrice d'Euler

Définition 35 (TL1 309)**.** Le $n-$ème polynôme cyclotomique est le polynôme unitaire ϕ_n dont les racines sont les racines primitives $n-$ème de l'unité : $\phi_n(X) = \prod_{\xi\in\mathbb{U}_n^*} (X - \xi)$

Proposition 36 (TL1 309, PER 80)**.** $deg(\phi_n) = \varphi(n)$

Exemple 37 (TL1 309)**.**
1. $\phi_1(X) = X - 1$
2. Si p est premier, $\varphi_p(X) = \frac{X^p-1}{X-1} = X^{p-1} + ... + X + 1$
3. $\phi_4(X) = X^2 + 1$

Proposition 38 (TL1 309)**.** Soit $n \geq 1$. Alors : $X^n - 1 = \prod_{d|n} \phi_d$

Théorème 39 (PER 82, DEV 1)**.** Pour $n \geq 1$, $\varphi_n(X) \in \mathbb{Z}[X]$ est un polynôme irréductible et unitaire, donc irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$ également.

3.2 Notion d'angles

Notation 40. PER 146 On note $O^+(2\mathbb{R})$ le gourpe des isométries de déterminants 1, c'est-à-dire :

$$O^+(2\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} |a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 = 1 \right\}$$

Proposition 41 (PER 146)**.** $O^+(2,\mathbb{R})$ et $\mathbb{U}$ sont isomorphes.

Corollaire 42 (PER 146)**.** $O^+(2,\mathbb{R})$ est commutatif.

Proposition 43 (PER 146)**.** Tout élément de $O^+(2,\mathbb{R})$ s'écrit sous la forme : $R(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

On a enfaite : (mettre schéma Ewna)

$$\begin{array}{cccc} \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \to & C(0,1) \to & O^+(2,\mathbb{R}) \to & O^+(\mathbb{R}^2) \\ \bar{t} \mapsto & e^{it} \mapsto & R(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \mapsto & (\cos(\theta), \sin(\theta)) \end{array}$$

(cf Annexe 1)

Définition 44 (PER 146)**.** L'élément $\bar{t} \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ s'appelle l'angle de $R(t)$. Le groupe $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ s'appelle le groupe des angles.

Méthode 45 (No ref)**.** On peut alors utiliser la forme qui nous intéresse le plus selon notre problème

Exemple 46 (No ref, un peu TL1 259,261)**.** Ceci s'illustre bien avec le problème de contruction du pentagone étoilée. Pour construire celui-ci, on souhaite en réalité construire 5 points à égale distance. Autrement dit, on se ramène à construire les points z^0, z^1, z^2, z^3, z^4, où $z = e^{i2\pi/5}$, i.e. les racines 5ème de l'unité. En passant à la forme $(\cos(2\pi/5), \sin(2\pi/5))$, on se rend compte qu'il est possible de construire $\cos(2\pi/5) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$. On peut ainsi construire $e^{i2\pi/5}$. Une fois ce point construit, on peut reporter l'angle $\frac{2\pi}{5}$ à l'aide d'un compas, et obtenir les autres points.

3.3 Calcul de déterminant

Lemme 47 (DEV 1)**.** Soit $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & . & . & . & a_n \\ a_n & a_1 & . & . & . & a_{n-1} \\ . & & . & & & . \\ . & & & . & & . \\ . & & & & . & . \\ a_2 & a_3 & . & . & . & a_1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice circulante. Posons $P(X) = \sum_{i=1}^{n} a_k X^{k-1}$. Alors $det(A) = \prod_{j=1}^{n} P(w^j)$ où $w = e^{2i\pi/n}$.

Exemple 48 (GOU 153)**.** [DEV bonus] Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

$$\Delta(\theta) = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & \cos(2\theta) & ... & \cos(n\theta) \\ \cos(n\theta) & \cos(2\theta) & ... & \cos((n-1)\theta) \\ & & & \\ \cos(2\theta) & \cos(3\theta) & ... & \cos(\theta) \end{vmatrix}$$
$$= 2^n \sin^{n-2}(\frac{n\theta}{2}) \left(sin^n(\frac{n+2}{2}\theta) - \sin^n(\frac{n\theta}{2}) \right)$$

Application 49 (DEV 1)**.** Soit P un polygone du plan complexe à n côtés. Notons $(z_1, ..z_n) \in \mathbb{C}^n$ les affixes des sommets de P. On définit alors pas récurrence une suite de polygones $(P_k)_k$ avec $P_0 = P$ et où les sommets de P_{k+1} sont les milieux des arrêtes de P_k. Alors $(P_k)_k$ converge vers l'isobarycentre de P.