Leçon 101 : Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.

On considèrera G un groupe et X un ensemble. Dans la leçon, les groupes seront notés multiplicativement.

Attention pour cette leçon, les livres ne prennent pas la notation que j'utilise habituellement

1 Action de groupes

1.1 Premières définitions

Définition 1 (Rom 19 E–> X ; TL2 58)**.** On dit que G opère à gauche sur X si on a une application de $G \times X$ dans X, notée $(g, x) \mapsto g \cdot x$ telle que :

1. $\forall g, h \in G, \forall x \in X, c \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x$
2. $\forall x \in X, 1 \cdot x = x$

Une telle application est appelée action à gauche de G sur E. On peut définir de manière analogue l'action à droite.

Exemple 2 (TL2 59)**.** L'application $(g, x) \in G \times X \mapsto x$ est vérifie les axiomes de la définition, c'est donc une action de groupe. Cette action peut être définie pour tout groupe G et tout ensemble X et on l'appelle l'action trivial.

Proposition 3 (TL2 58)**.** Il revient au même de se donner une action de G sur X ou un morphisme de φ de G dans le groupe $(\mathfrak{S}(X), \circ)$.
La traduction se fait par la formule : $g \cdot x = \varphi(g)(x)$.
Nous dirons que φ est le morphisme associé à l'action donnée.

Exemple 4 (TL2 60)**.** Le morphisme associé à l'action de l'exemple précédent est $\varphi : g \mapsto id$.

Définition 5 (ROM 20)**.** On dit qu'une action est fidèle si le morphisme de groupes φ de la proposition précédente est injectif. Autrement dit si :

$$(g \in G \text{ et } \forall x \in E, g \cdot x = x) \iff g = 1$$

Exemple 6. L'action des exemples précédent n'est clairement pas fidèle puisque $Ker(\varphi) = G$.

Exemple 7 (TL2 60)**.** Introduisons une autre action de référence qui elle sera fidèle. On définit une action de G sur lui même par $(g, h) \in G^2 \mapsto gh$. Cette action est appelée action par translation à gauche de G sur lui-même. La permutation associée à cette action est la translation à gauche $\varphi(g) : x \mapsto gx$. Cette action est fidèle puisque, pour tout $g \in G$, $\varphi(g)(1) = g \neq 1$ et donc $\varphi(g) \neq id$.

1.2 Orbites

Considérons une action de G sur X. blabla : Si la théorie des actions de groupes est importante c'est qu'elle va nous apporter des renseignement sur G et X. Un premier outil pour cette étude sont les orbites.

Proposition 8 (TL2 65)**.** Soit R la relation définie sur X par : xRy s'il existe un élément $g \in G$ tel que $g \cdot x = y$. Alors R est une relation d'équivalence.

Définition 9 (TL2 65)**.** Les classes d'équivalence pour la relation R ci-dessus sont appelées orbites de X sous l'action de G.
Plus précisément, si $a \in X$, la classe de a, noté $Orb(a)$, est appelée orbite de a sous l'action de G.

Proposition 10 (TL2 65)**.** Pour tout $a \in X$, l'orbite de a sous l'action de G est : $Orb(a) = \{g \cdot a | g \in G\}$.

Exemple 11 (TL2 66, voir où mettre)**.** Considérons l'action $g,h) \in G^2 \mapsto ghg^{-1}$. On peut définir cette action pour tout groupe G, on dit que G agit sur lui-même par conjugaison. Le morphisme associée à cette action est $\varphi(g) : x \mapsto gxg^{-1}$.
Le noyau de φ est le centre $Z(G)$ donc on a que l'action par conjugaison est trivial si et seulement si G est commutatif.
La relation d'équivalence associée à cette action est appelée conjugaison et on appelle classe de conjugaison les orbites correspondantes. Deux éléments de la même classe d'équivalence sont dit conjugués.

Proposition 12 (TL2 65)**.** Les orbites de X sous l'action de G forment une partition de X.

Proposition 13 (TL2 66)**.** [Égalité aux classes] Soit X un ensemble fini et T un ensemble des représentant des orbites de X sous l'action de G. Alors : $|X| = \sum_{a \in T} |Orb(a)|$

Définition 14 (TL2 68)**.** On dit qu'une action de G sur X est transitive s'il y a une unique orbite.

Exemple 15 (TL2 68)**.** L'action par translation à gauche d'un goupe sur lui même est transitive : étant donné $x, y \in G$, l'élément $yx^{-1} \in G$ et $(yx^{-1}) \cdot x = y$.

1.3 Points fixes et stabilisateur

On considère toujours que G agit sur X. blabla : On a vu un renseignement sur le cardinal de X mais on peut aller plus loin en introduisans le notion de stabilisateur.

Définition 16 (TL2 69)**.** Lorsque $g \in G$ et $g \cdot x = x$, on dit que x est un point fixe de g, ou que g laisse fixe x. Si x est un point fixe de tout élément de G, on dit que x est un point fixe de G.

Définition 17 (TL2 69)**.** L'ensemble des $g \in G$ laissant fixe x est appelé stabilisateur de x. Il et noté $Stab(x)$. Ainsi $Stab(x) = \{g \in G | g \cdot x = x\}$.

Proposition 18 (TL2 69)**.** $Stab(x)$ est un sous-groupe de G, pour tout $x \in X$.

Théorème 19 (ROM 21, TL2 73)**.** Pour tout $x \in X$

1. $g \mapsto g \cdot a$ de G dans X induit une bijection de $G/Stab(a)$ sur $Orb(a)$.
2. L'orbite $G \cdot a$ est finie si et seulement si l'indice $[G : Stab(a)] = [G : Stab(a)]$
3. Si G est fini, $Orb(a)$ est également fini et $|Orb(a)| = \frac{|G|}{|stab(a)|}$

Remarque 20 (ROM 20)**.** On peut alors réécrire l'égalité aux classes comme

$$|X| = \sum_{a \in T} \frac{|G|}{|Stab(a)|}$$

blabla : On a donc un moyen d'exprimer le cardinal de X en fonction des orbites ou bien des stabilisateurs. On peut également retrouver le caridnal de G avec la connaissance des ces deux caridnaux.

Définition 21 (ROM 35, CAL2 303)**.** Le fixateur d'un élément $g \in G$ est l'ensemble $\{x \in X | g \cdot x = x\}$

Proposition 22 (CAL 303)**.** Si G est un groupe fini agissant sur X, le cardinal de l'ensemble de ces orbites vérifie :

$$|X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |Fix(g)|$$

Application 23 (DEV 1)**.** Soit G un groupe d'ordre n et $Z(G)$ son centre. On note p_G la probabilité que deux éléments h, g de G choisis indépendamment et de façon équiprobable commutent.

1. Si G est non abélien, $p \leq \frac{5}{8}$
2. Si k est le nombre de classe de conjugaison, alors $p = \frac{k}{|G|}$.

2 Applications

2.1 Groupe symétrique

Cahnger mettre E partout

Proposition et définition 24 (TL2 60)**.** Le groupe $\mathfrak{S}_n$ agit sur $X = \{1, 2, .., n\}$ en posant $\sigma \cdot x = \sigma(x)$. On appelle cette action, l'action naturelle.

Proposition 25 (TL2 60)**.** Le morphisme associée est l'application identité et cette action est donc fidèle.

Application 26 (CAL2 304, à détailler !)**.** L'espérance du nombre de point fixe d'une permutation est 1

Définition 27 (ROM 40)**.** Le support d'une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ est le complémentaire de ses points fixes, c'est-à-dire :

$$Supp(\sigma) = \{x \in E | \sigma(x) \neq x\}$$

Proposition 28 (ROM 41)**.** Soit $\sigma \in \mathfrak{S}(E)$. On peut définir une action naturelle du groupe $H =< \sigma >$ sur E par $(\sigma^k, x) \mapsto \sigma^k(x)$.

Définition 29. ROM 41 L'orbite d'une permutation σ est l'orbite de l'action définie dans la proposition précédente.

Lemme 30 (BER ?, ROM 41)**.** Soit ω une σ-orbite à p éléments et soit $a \in \omega$. Alors, p est le plus petit entier positif tel que $\sigma^p(a) = a$ et on a $w = \{a, \sigma(a), ..., \sigma^{p-1}(a)\}$.

Lemme 31 (BER ?, ROM 41)**.** Soit $\omega \in \Omega^*$. On définit $\sigma_\omega \in \mathfrak{S}(E)$ par $\sigma_\omega(a) = \sigma(a)$ si $a \in \omega$ et $\sigma_\omega(a) = a$ si $a \notin \omega$. Alors σ_ω est un cycle de support ω, et pour tout $a \in \omega$, on a $\sigma_\omega = (a \ \ \sigma(a) \ ... \ \sigma^{p-1}(a))$, où p est le nombre d'éléments dans ω.
De plus, tout p-cycle est de cette forme.

Théorème 32 (BER 204, ROM42 DEV 1)**.** Soit $\sigma \in \mathfrak{S}(E)$. Alors σ se décompose en produit de cycles à support disjoints, et cette décomposition est unique à l'ordre des facteurs près. Cette décomposition est donnée par : $\sigma = \prod_{\omega \in \Omega^*} \sigma_\omega$ où Ω^* représente l'ensemble des σ-orbites non réduite à un singleton.

Corollaire 33 (BER 206, DEV 2)**.** $\mathfrak{S}(E)$ est engendré par

1. les cycles.
2. les transpositions.

Corollaire 34 (BER 207)**.** $\mathfrak{S}_n$ est engendré par

1. les transpositions $(k \ k+1)$ pour $1 \leq k \leq n-1$
2. les transpositions $(1 \ k+1)$ pour $1 \leq k \leq n-1$
3. (12) et $(1 \ 2 \ ... \ n \ )$

Théorème 35 (ROM 53)**.** [Cayley] Tout groupe G est isomorphe à un sous groupe de $\mathfrak{S}(G)$.

2.2 Reformulation de la classification des matrices

Soit $\mathbb{K}$ un corps et $n, p \in \mathbb{N}^*$.
Toute partie aussi dans HHGG1 p 2,3

Définition 36 (TL2 75)**.** Deux matrices $A, B \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ sont dites équivalentes s'il existe des matrices invesibles $P \in Gl_p(\mathbb{K})$ et $Q \in Gl_n(\mathbb{K})$ telles que $B = QAP$.

Théorème 37 (du rang)**.** [REF ? ? ? cf ROM 195] Deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang.

Proposition 38 (TL2 75)**.** Il s'agit en faite de la relation d'équivalence associé à l'action du groupe $Gl_p(\mathbb{K}) \times Gl_q(K)$ sur $M_{n,p}(\mathbb{K})$ définie la formule $(P, Q) \cdot A = QAP^{-1}$.

Remarque 39. Classifier les matrices $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ revient donc à expliciter un ensemble de représentant des orbites de cette action.

Proposition 40 (TL2 75, HHGG 1 3)**.** Deux matrices sont dans la même orbite si et seulement si elles ont même rang.

2.3 En géométrie

Exemple 41 (TL2 67)**.** Considérons G le groupe des rotation vectorielles de $\mathbb{R}^2$ et cherchons à déterminer les orbites de $\mathbb{R}^2$ sous l'action naturelle de G.
$G := \{R_\theta | \theta \in \mathbb{R}\}$ où R_θ correspond à la rotation d'angle θ de centre $O \in \mathbb{R}^2$.

Notons tout d'abord que $Orb(O) = \{O\}$.
Considérons $A \in \mathbb{R}^2$ distinct de O et posons $r := OA$ et $\Omega = (r, 0)$. Lorque θ décrit $\mathbb{R}$, le point $M_\theta := R_\theta(\Omega) = (\cos(\theta), \sin(\theta))$ décrit le cercle $C(O, r)$. On a donc $Orb(\Omega) = C(O, r)$. Comme $A \in C(O, r)$, $Orb(A) = Orb(\Omega = C(O, r)$
Ainsi les orbites de $\mathbb{R}^2$ sous l'action de G sont d'une part le singleton $\{O\}$ et d'autre part l'ensemble des cercles de centre O.
Notifions que cette example illustre bien le terme "orbite". On pourra se référer à l'annexe 1.