191 :Techniques d'algèbre en géométrie.

MIANNAY Matteo, oral blanc du mois de mai.

1 Espaces affines, transformations affines

E désigne un $\mathbb{R}$-EV.

Définition 1 (Espace affine) $\mathcal{E}$ est un espace affine de direction E si E agit sur $\mathcal{E}$ de manière simplement transitive : $(u, x) \mapsto u + x$. $\mathcal{E}$ est l'ensemble des points, E des vecteurs.

Exemple 2 L'ensemble des solutions de $y' = y$ forme un espace affine.

Définition 3 Soit $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$ des espaces affines. $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}'$ est dite affine si il existe $\varphi : E \longrightarrow E'$ linéaire, telle que pour tout couple $(x, u) \in \mathcal{E} \times E$, on ait : $f(x + u) = f(x) + \varphi(u)$

Proposition 4 Si f est affine bijective, f^{-1} l'est.

Exemple 5 Si $\mathcal{E} = \prod \mathcal{E}_i$ est un produit d'espace affine, les projections sur chaque espace affine sont affines.

Proposition 6 Les applications affines préservent les barycentres et l'alignement.

Définition 7 (Repère affine) $(a_0, ..., a_n)$ est un repère affine de $\mathcal{E}$ si $(a_0a_1, ..., a_0, a_n)$ est une base de E.

Proposition 8 (Décret) Si $(a_0, ..., a_n)$ est un repère affine de $\mathcal{E}$, $(b_0, ..., b_n)$ des points de $\mathcal{F}$ alors il existe une unique application affine envoyant les a_i sur les b_i.

Proposition/Définition 9 On appelle $GA(\mathcal{E})$ le groupes des applications affines et bijectives de $\mathcal{E}$. ON l'appelle groupe des isométries de $\mathcal{E}$.

Définition 10 On note t_u la translation de vecteur u, $h(O, \lambda)$ l'homothétie de centre O et de rapport λ.

Proposition/Définition 11 L'ensemble $HT(\mathcal{E})$ formé des homothéties et des translations de $\mathcal{E}$ forme un sous-groupe distingué de $GA(\mathcal{E})$.

2 Isométries

2.1 Isométries d'un espace affine

Définition 12 Si E est euclidien, on note $O(E)$ l'ensemble des endomorphismes préservant le produit scalaire.

Définition 13 Si $(\mathcal{E}, E)$ est un espace affine avec E euclidien, une application affine de E est appelée isométrie dès que sa partie linéaire en est une.

Proposition 14 Classification des isométries en petite dimension (annexe)

2.2 Les isométries préservant un polygone régulier

On note Γ_n le polygone régulier à n côtés.

Définition 15 On note D_n le groupe des isométries préservant les sommets de Γ_n. C'est le groupe diédral.

Définition 16 On note σ la réflexion d'axe $\mathbb{R}e_1$, r la rotation d'angle $\frac{2\pi}{n}$.

Proposition 17 D_n est le groupe engendré par σ et r.

Proposition 18 D_n est de cardinal $2n$.

Proposition 19 Si G est un groupe engendré par r d'ordre n, s d'ordre 2, que $rsr = s$, alors $G = D_n$.

Proposition 20 $D_3 \simeq S_3$.

Proposition 21 D_4 et H_8 ont même table de caractères mais ne sont pas isomorphes.

2.3 Les isométries préservant un solide platonicien

Définition 22 On appelle polytope de $\mathbb{R}^n$ l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points de $\mathbb{R}^n$.

Définition 23 Dans $\mathbb{R}^3$, on appelle solide platonicien un polytope régulier et convexe.

Proposition 24 Il n'en existe que 5 (dont 1 de multiplicité 2 !). La classification est donnée en annexe.

Proposition 25 Si Δ_4 est le tétraèdre régulier, $Is(\Delta_4) \simeq S_4$, $Is^+(\Delta_4) \simeq A_4$.

Théorème 26 (Isométries du cube et tables de caractères de S_4.) $I_s(C_6) \simeq S_4 \times \frac{Z}{2Z}, Is^+(C_6) \simeq S_4$. On en déduit la table de caractère de S_4, et on peut établir un dictionnaire, lesquels figurent en annexe.

Définition 27 (Solide dual) Si X est un solide platonicien, on définit X^* le solide défini par l'enveloppe convexe du centre de ses faces. C'est alors un solide platonicien.

Proposition 28 $Is(X^*) \simeq Is(X)$, $X ** = X$.

2.4 Sous-groupes finis de $SO_3(\mathbb{R})$

Proposition 29 Soit G un groupe fini, agissant sur X un ensemble fini. On note r le nombre d'orbites de X sous l'action de G. Alors $r = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|Fix(g)|$.

Proposition 30 Les sous-groupes finis de $SO_3(\mathbb{R})$ sont $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$, D_n, A_4, S_4 et A_5. On reconnaît les groupes sans volumes, et les groupes d'isométries positives des solides platoniciens.

3 Formes quadratiques et coniques

Définition 31 (Conique) Une conique est l'ensemble des zéros d'un polynôme de degré 2 à deux inconnues dans $\mathbb{R}^2$. C'est aussi la section d'un cône par un plan.

Proposition 32 Un polynôme de degré 2 s'écrit $f(x) = q(x) + l(x) + c$ où q est une forme quadratique, l est une forme linéaire et c est une constante.

Proposition 33 q est invariante par $GA(\mathcal{E})$.

Proposition 34 Sur $\mathbb{R}$, $A \in S_n(\mathbb{R})$ est congrue à $diag(I_p, -I_q, 0)$ où (p,q) est la signature de A.

Proposition 35 Les coniques non dégénérées et non réduites à un point sont, modulo le groupe affine de $\mathcal{E}$, les coniques d'équation : $x^2 - y^2$ (droites sécantes), $x^2 - y^2 = 1$ (ellipse), $x^2 - y^2 = -1$ (hyperbole).

Si (A,B,C) sont non alignés dans le plan, que M est un point quelconque du plan, il existe un unique triplet (x,y,z) de somme 1 tel que M soit le barycentre de $(A,x),(B,y),(C,z)$. On appelle (x,y,z) les coordonnées barycentriques de M.

Proposition 36 Si $(M_i)_{1\leqslant i\leqslant 3}$ ont pour coordonnées barycentriques (x_i,y_i,z_i), alors les trois points sont alignés si et seulement si le déterminant suivant:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

est nul.

Proposition/Définition 37 Si 5 points sont tels que quatre quelconque d'entre eux ne sont jamais alignés, alors une unique conique passe par ces cinq points, laquelle est non dégénérée si et seulement si trois d'entre eux ne sont jamais alignés.

Proposition 38 Sur $\mathbb{F}_q$, il y a deux classes de formes quadratiques données par le discriminant.

Théorème 39 (Isométries d'une forme quadratique sur un corps fini) En caractéristique différente de 2,

$$SO_2(\mathbb{F}_q) \simeq \left\{ \begin{array}{l} \frac{\mathbb{Z}}{(q-1)\mathbb{Z}} si - 1 est\ un\ carré\ dans\ \mathbb{F}_q \\ \frac{\mathbb{Z}}{(q+1)\mathbb{Z}} sinon. \end{array} \right\}$$

Remarque 40 La condition -1 est un carré dans F_q correspond à l'existence ou non d'un vecteur isotrope.

4 Construction à la règle et au compas

Définition 41 Si $A \subset \mathbb{R}^2$, $M \in \mathbb{R}^2$ on dit que M est constructible à la règle et au compas à partir de A si M est l'intersection d'une droite ou d'un cercle tracé à partir de A avec une droite ou un cercle tracé à partir de A.

Définition 42 Un point M est dit constructible à la règle et au compas si il est constructible à partir de $(0,0)$ et $(0,1)$, ou à partir d'autres points constructibles.

Définition 43 Un réel est dit constructible si $M = (x,0)$ l'est.

Proposition 44 L'ensemble des réels constructibles est un corps stable par racine carrée.

Proposition 45 On sait contruire des parallèles et des perpendiculaires.

Théorème 46 (Théorèmes de Gauss et Wantzel) $a \in \mathbb{R}$ est constructible si et seulement si a est au sommet d'une suite d'extensions quadratiques de $\mathbb{Q}$.

Remarque 47 On montre ainsi que la duplication du cube, et la trissection du cercle sont des problèmes impossibles, répondant alors aux problèmes des grecs.

Théorème 48 Un polygone régulier à n côtés est constructible à la règle et au compas si et seulement si $n = 2^{\alpha} p_1 ... p_r$ où les p_i sont des premiers de Fermat distincts.

Remarque 49 On ne montrera que le sens direct.

En annexe, mettre : la classifcation des isométries affines et vectorielles en dimension 2 et 3 (se trouve dans le Audin), table des caractères de S_4, le tableau avec les correspondances S_4 et isométries du cube (qui est envoyé sur quoi, qui sont les Sylow, etc, se trouve dans le NH2G2 2), le tableau de solides platoniciens avec groupes d'isométrie et dualité (NH2G2 2 aussi évidemment), et des dessins de constructions à la règle et au compas.