Nom:

MIANNAY

Prénom:

Matteo

Numéro de Jury:

1

Numéros des sujets tirés:

125 - 191

Intitulé du sujet choisi:

Techniques d'algèbre en géométrie

I Espace affine, transformations affines

Ici, $E$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel

Def 1 $\mathcal{E}$ est un espace affine de direction $E$ si $E$ agit sur $\mathcal{E}$ de manière simplement transitive:
$(x, v) \in \mathcal{E} \times E \to x + v$

Def 2 $\mathcal{E}$ est l'ensemble des points, $E$ des vecteurs

Ex 3 L'ensemble des solutions de $\{ y' = y$ est un espace affine.

Def 4 Soit $(\mathcal{E}, E), (\mathcal{E}', E')$ des espaces affines.
$f: \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ est dite affine si $\exists \varphi: E \to E'$, $f(x+v) = f(x) + \varphi(v)$ où $\varphi$ est linéaire, et $\forall x, v \in \mathcal{E} \times E$.

Prop 5 Si $f$ est affine bijective, $f^{-1}$ l'est.

Ex 6 Si $\mathcal{E} = \prod \mathcal{E}_i$ est un produit d'espace affine, les projections sur les $\mathcal{E}_i$ sont affines.

Prop 7 Toute application affine préserve les barycentres et l'alignement.

Def 8 $(a_0, a_1, \dots a_n)$ est un repère affine de ~~$\mathcal{E}$~~ ~~plan~~ si $(\overrightarrow{a_0 a_1}, \dots \overrightarrow{a_0 a_n})$ est une base de $E$

Prop 9 Si $(a_0, \dots a_n)$ est un repère affine de $\mathcal{E}$, $(b_0, \dots b_n)$ des points de $\mathcal{F}$, il existe une unique application affine $\phi: \mathcal{E} \to \mathcal{F}$, $\phi(a_i) = b_i$

Def 10 On appelle $GA(\mathcal{E})$ le groupe des applications affines bijectives de $\mathcal{E}$. On l'appelle groupe des isométries.

Prop 11 $GA(\mathcal{E})$ agit transitivement sur les triangles non aplatis.

Def 12 On note $t_{\vec{v}}$ la translation de vecteur $v$, $h(c, \lambda)$ l'homothétie de centre $c$ et rapport $\lambda$.

Prop 13 L'ensemble $HT(\mathcal{E})$ formé des homothéties et des translations de $\mathcal{E}$ est distingué dans $GA(\mathcal{E})$.

Prop 14 $HT(\mathcal{E})$ est le sous-groupe des transformations préservant le parallélisme.

II Isométries d'un espace ~~affine~~

Def 15 Si $E$ est euclidien, on appelle $O(E)$ l'ensemble des endomorphismes de $E$ préservant le produit scalaire

Def 16 Si $(\mathcal{E}, E)$ est affine, $E$ euclidien, on dit que $f$ est ~~affine~~ une isométrie si sa partie linéaire en est une.

Prop 17 Classification des isométries ~~(.....)~~ ~~en~~ pour $n = 2, 3$

Intercalaire N°

| Cas vectoriel : | $I_s^+$ | $I_s^-$ |
|---|---|---|
| $n=2$ | Rotations $\simeq \mathbb{R}/2\pi$ | Réflexions / à une droite |
| $n=3$ | Rotations | Réflexions / à un plan $\sim R(D,\theta)\circ S_D^{\perp}$ |

| Cas affine | $I_s^+$ | $I_s^-$ |
|---|---|---|
| $n=2$ | Translation Rotation | Réflexions Symétries glissées |
| $n=3$ | Translation rotation vissages | Réflexions / plan symétries antirot. Réflexions glissées Antirotations |

## B Les isométries préservant un polygone régulier

On note $\Gamma_n$ le polygone régulier à $n$ côtés.

Def 18 On note $Is(\Gamma_n)$ l'ensemble des isométries préservant les sommets de $\Gamma_n$. On note alors $D_n = Is(\Gamma_n)$, et on l'appelle groupe diédral.

Def 19 On note $\sigma$ la réflexion d'axe $\mathbb{R}e_1$, $\rho$ la rotation d'angle $\frac{2\pi}{n}$.

Prop 20 $D_n = \langle \sigma, \rho \rangle$
$= \{Id, \rho, \dots \rho^{n-1}, \sigma, \sigma\rho, \dots \sigma\rho^{n-1}\}$

Prop 21 $\# D_n = 2n$.

Prop 22 Si $G$ est engendré par $\rho$ d'ordre $n$ et $\sigma$ d'ordre 2, $\sigma \neq \rho$, $\rho\sigma\rho = \sigma$, alors $G \simeq D_n$.

Prop 23 $S_3 \simeq D_3$

Prop 24 $H_8$ et $D_4$ ont même table de caractères mais ne sont pas isomorphes

## C Les isométries préservant un ~~polyèdre~~ solide platonicien

Def 25 On appelle polytope de $\mathbb{R}^n$ l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points dans $\mathbb{R}^n$

Def 26 Dans $\mathbb{R}^3$, on appelle solide platonicien un polytope de dimension 3 régulier et convexe.

Prop 27 Il n'en existe que 6.

Prop 27 Si $\Delta_4$ est le tétraèdre régulier, $Is(\Delta_4) \simeq \sigma_4$, $Is^+(\Delta_4) = A_4 \simeq S_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

Dev 28 Si $C_6$ est le cube, $Is^+(C_6) \simeq S_4$
$Is(C_6) \simeq S_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

Prop 29 : on peut établir une correspondance (voir annexe).

Def 30 Si $X$ est un solide platonicien on définit $X^*$ par l'enveloppe convexe du centre de ses faces

Prop 31 $Is(X^*) \simeq Is(X)$, $X^{**} = X$.

## D Sous-groupes finis de $SO_3(\mathbb{R})$

Prop 32 Soit $(X, G)$ finis, ~~$g \in G$~~ $G \to X$
$n$ = le nombre d'orbites de $X$ sous l'action de $G$, alors : $n = \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} |X^g|$

Prop 33 Les sous-groupes finis de $SO_3(\mathbb{R})$ sont $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $D_n$, $A_4$, $S_4$ et $A_5$

## III Formes quadratiques et coniques

Def 34 Une conique est l'ensemble des zéros d'un polynôme de degré deux à deux inconnues sur $\mathbb{R}^2$. ~~Si elle est non vide, elle est propre, non dégénérée~~

Prop 35 Un polynôme de degré 2 s'écrit $f(x) = q(x) + l(x) + c$ et $q$ est une forme quadratique et $l$ une application linéaire de manière unique

Prop 36 $q$ est invariante par $GA(E)$

TR 37 Sur $\mathbb{R}$, $A \in S_n(\mathbb{R})$ est congrue à $\begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_q & \\ & & 0 \end{pmatrix}$.

App 38 Modulo $GA(E)$, $f = x^2+y^2$, $x^2-y^2$, $x^2+y^2+1$, $x^2-y^2+1$, $x^2+y^2-1$ (dans le cas non dégénéré)

En enlevant les coniques réduites à un point ou vide, il reste :

$f : x^2 - y^2$ (droites sécantes)

$x^2 - y^2 + 1$ (hyperbole)

$x^2 + y^2 - 1$ (ellipse) (cas non dégénéré)

Prop 39 En ajoutant le cas dégénéré, on obtient $y = x^2$, $x^2 = 1$, $x^2 = 0$.

DEV 2

Prop 40 En caractéristique $\neq 2$,
$SO_2(\mathbb{F}_q) \simeq \mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z}$ si $-1$ est un carré, $\mathbb{Z}/(q+1)\mathbb{Z}$ sinon.

Prop 41 Si $(A, B, C)$ sont non alignés dans le plan, que $M$ est un point du plan, $\exists! (x, y, z)$, $x + y + z = 1$ et $M$ est le barycentre de $(A, x)(B, y)(C, z)$. On appelle $(x, y, z)$ les coordonnées barycentriques.

Prop 42 Si $(M_i)_{1 \leq i \leq 3}$ ont pour coordonnées barycentriques $(x_i, y_i, z_i)$, les 3 points sont alignés $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0$

Prop 43 Si 5 points sont tels que quatre quelconques ne sont jamais alignés, alors une unique conique passe par ces 5 points. Elle est non dégénérée $\Leftrightarrow$ 3 d'entre eux ne sont jamais alignés.

## IV Construction à la règle et au compas

Def 44 Si $A \subset \mathbb{R}^2$, $M \in \mathbb{R}^2$, on dit que $M$ est constructible si $\exists A_0 \subset \dots \subset A_n$ tels que : $A_0 = \{O, I\}$, $M \in A_n$, $A_i = A_{i-1} \cup \{M_i\}$ où $M_i$ est ~~constructible~~ l'intersection de un cercle, d'une droite ou de deux cercles ou de deux droites construits à partir de points de $A_{i-1}$.

Un réel est dit constructible si $(x, 0)$ l'est.

Prop 45 L'ensemble des nombres constructibles est un corps stable par racine carrée.

Prop 46 On sait construire des parallèles et des perpendiculaires.

Th 47 (Gauss-Wantzel) $a \in \mathbb{R}$ est constructible $\Leftrightarrow$ ~~$\exists a_1, \dots$ an tel que~~ $\exists K_1, \dots, K_n$, $a \in K_n$ et $\mathbb{Q} \subset K_1 \subset \dots \subset K_n$, $[K_{i+1} : K_i] = 2$

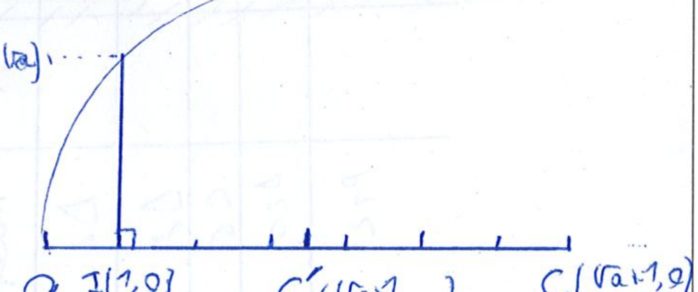
DEV 3

App 48 La duplication du cube et la trisection du cercle sont des problèmes impossibles.

Th 49 Un polygône régulier à $n$ côtés est constructible ssi $n = 2^\alpha p_1 \dots p_r$ où les $p_i$ sont des premiers de Fermat.

App 50 On ne sait pas construire les polygônes réguliers à 9 côtés.

Ill 51 : Construction de $\sqrt{a}$ ~~sqrt(a)~~



Annexe

Correspondance $S_4$ - ~~$D_4$~~ $Is^+(C_6)$

| Nombre | Ordre | Classe de $Is^+$ | $S_4$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | Id | Id |
| 8 | 3 | rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ d'axe sommet - sommet opposé | 3-cycle |
| 3 | 2 | Rotation d'angle $\pi$ passant par le centre de deux ~~arêtes~~ faces opposées | ~~transposition~~ Double transposition |
| 6 | 2 | Rotation d'angle $\pi$ passant par le centre de deux arêtes opposées | Transposition |
| 6 | 4 | Rotation d'angle $\pm\frac{\pi}{2}$ passant par le centre de deux faces opposées | 4-cycle |
| 4 | 3-Sylow | Stabilisateurs des 4-axes reliant sommet sommet opposés | 3-cycles |
| 3 | 2-Sylow | Action sur les paires de faces opposées | $D_4$ |

Table de caractères de $S_4$

| $\lvert C_G \rvert$ | 1 | 6 | 3 | 8 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\sigma_4$ | Id | (12) | (12)(34) | (123) | (1234) |
| $\chi_{triv}$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $\chi_\varepsilon$ | 1 | -1 | 1 | 1 | -1 |
| $\chi_{std}$ | 3 | -1 | -1 | 0 | 1 |
| $\varepsilon\chi_{std}$ | 3 | -1 | -1 | 0 | 1 |
| $\varphi$ | 2 | 0 | 2 | -1 | 0 |

| | Polyèdre | X | Dual | S | A | F | $Is(X)$ | $Is^+(X)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Delta_4$ | Tétraèdre | | $\Delta_4$ | 4 | 6 | 4 | $S_4$ | $A_4$ |
| $C_6$ | Cube | | $\Delta_8$ | 8 | 12 | 6 | $S_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ | $S_4$ |
| $\Delta_8$ | Octaèdre | | $C_6$ | 6 | 12 | 8 | $S_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ | $S_4$ |
| $D_{12}$ | Dodécaèdre | | $D_{20}$ | 20 | 30 | 12 | $A_5 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ | $A_5$ |
| $D_{20}$ | Isocaèdre | | $D_{12}$ | 12 | 30 | 30 | $A_5 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ | $A_5$ |