Nom:

NIANNAX

Prénom:

Matteo

Numéro de Jury:

1

Numéros des sujets tirés:

127 - 161

Intitulé du sujet choisi:

~~Espace~~ Exemples de nombres remarquables. Exemples d'anneaux de nombres remarquables. Applications

I Premiers exemples. Les réels.

A_ ~~B~~ Réels, rationnels, des anneaux.

Prop 1 Tout réel x s'écrit $x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n}$ de manière unique où (a_n) est une suite d'entiers de $[0, 9]$ non stationnaire en 9

App 2 $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable

~~Prop 3~~ Def 3 Un nombre est dit décimal si la suite associée est stationnaire à 0.

Prop 4 x est rationnel si et seulement si la suite associée est périodique à partir d'un certain rang.

Prop 5 $\mathbb{Q}$ est dénombrable, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ne l'est pas

Prop 6 $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

Prop 7 e, π sont irrationnels

B Développement en fractions continues

Soit (a_n) une suite de réels >0, $\xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Def 8 On appelle fraction continue de (a_n) l'expression : $[a_0, \dots a_n] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \dots \frac{1}{a_n}}}}$

On construit alors :

$\xi_0 = \xi$, $a_n = \lfloor \xi_n \rfloor$

et $\xi_{n+1} = \frac{1}{\xi_n - a_n}$.

Prop 9 On a alors $\xi = [a_0, \dots a_{n-1}, \xi_n]$

Def 10 On pose $p_0 = a_0$, $q_0 = 1$, $q_1 = a_1$, $p_1 = a_1 a_0 + 1$

et $p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}$

$q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}$

Alors : 1) $\frac{p_n}{q_n}$ est une fraction irréductible

2) $\frac{p_n}{q_n} \xrightarrow[n]{} \xi$

3) $\forall p, q \in \mathbb{Z}^2$, $0 < q \leq q_n$, $|q\xi - p| \geq |q_n \xi - p_n|$

On dit que $\frac{p_n}{q_n}$ est une meilleure approximation fractionnaire.

Prop 11 (ξ_n) est périodique à partir d'un certain rang si et seulement si ξ est racine d'un polynôme irréductible sur $\mathbb{Q}$ de degré 2.

C - Sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$

Th 12 Les sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$ sont soit denses, soit monogènes.

App 13 ~~Si ...~~ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, non nuls. Alors $\alpha\mathbb{Z} + \beta\mathbb{Z}$ est monogène si et seulement si $\frac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{Q}$.

App 14 Soit f continue périodique non constante. Alors f admet une plus petite période.

Rem 15 On peut définir π avec le théorème 12.

Intercalaire N° 2

D- Equirépartition

Def 16 Soit $(u_n) \in [0,1]^{\mathbb{N}}$, $0 \le a \le b \le 1$. On pose $X_n(a,b) = \#\{k \in [\![1,n]\!], u_k \in [a,b]\}$. On dit que (u_n) est équirépartie si $\frac{X_n(a,b)}{n} \underset{n}{\longrightarrow} b-a$ pour tout couple a, b.

Prop 16 Il y a équivalence entre :
1) (u_n) est équirépartie
2) $\forall f : [0,1] \to \mathbb{R}$ C^0, $\int_0^1 f(t)\,dt = \lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} f(u_k)$
3) $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} e^{i2\pi p u_k} \underset{n}{\longrightarrow} 0$.

Def 17 $(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est dite équirépartie si $u_n = x_n - \lfloor x_n \rfloor$ l'est.

Ex 18 $(n\theta)$ est équirépartie si et seulement si $\theta \notin \mathbb{Q}$.

App ~~30~~ 19 Soit $1 \le i \le 9$. On note $N_i(n)$ le nombre d'éléments de $\{1, 2, \dots, 2^n\}$ dont le premier chiffre de l'écriture décimale est i. Alors $\frac{N_i(n)}{n} \longrightarrow \frac{\ln(i+1) - \ln(i)}{\ln(10)}$.

II Corps de nombres, anneaux de nombres

A Nombres algébriques, entiers algébriques.

1) Nombres algébriques

Def 20 Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. On dit que α est algébrique s'il existe $P \in \mathbb{Z}[X]$, $P \neq 0$, $P(\alpha) = 0$.

Def 21 On note $I_\alpha = \{P \in \mathbb{Q}[X], P(\alpha) = 0\}$. C'est un idéal de $\mathbb{Q}[X]$, on note Π_α un générateur unitaire de I_α, (dès que $I_\alpha \neq \{0\}$)

Def 22 Si $I_\alpha = \{0\}$, on dit que α est transcendant.

Ex 23 e, π sont transcendants. $(\pi + e)$ ou (πe) est transcendant.

$\sqrt{2}$ est algébrique.

On fixe α un réel algébrique.

Def 24 On appelle le degré de α l'entier $\deg(\Pi_\alpha)$.

~~Prop~~ Ex 25 $\deg(\sqrt{2}) = 2$.

Def 26 On note $\overline{\mathbb{Q}}$ l'ensemble des nombres algébriques.

Prop 27 $\overline{\mathbb{Q}}$ est un corps algébriquement clos.

Th 28 Soit α algébrique de degré $d \ge 2$. On pose $P = k\,\Pi_\alpha$, où k est un entier tel que $P \in \mathbb{Z}[X]$. Soit $C' = \max_{[\alpha-1, \alpha+1]} |P'|$, $C = \min(1, \frac{1}{C'})$. Alors $\forall \frac{p}{q}$, $q > 0$, $p, q \in \mathbb{Z}$, $|\alpha - \frac{p}{q}| \ge \frac{C}{q^d}$.

Ex 29 $\alpha = \sqrt[3]{17}$ Alors $C' = 3(\sqrt[3]{17} + 1)^2$, $C = \frac{1}{C'} \ge 0{,}026$. Alors $|\sqrt[3]{17} - \frac{p}{q}| \ge \frac{0{,}026}{q^3}$.

Prop 30 Si α vérifie : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists \frac{p}{q}$, $q \ge 2$, $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^n}$, α est transcendant.

Def 31 On dit que α est un nombre de Liouville.

Ex 32 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}}$ est transcendant.

2) Entiers algébriques.

Def 33 On dit que α est entier algébrique s'il existe $P \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire annulant α.

Prop 34 Les entiers algébriques forment un anneau, on le note $\overline{\mathbb{Z}}$.

Prop 35 $\mathbb{Q} \cap \overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$.

Prop 36 $\mathbb{U}_n \subset \overline{\mathbb{Z}}$

B. Corps de nombres

Def 37 On appelle corps de nombres toute extension de degré finie de $\mathbb{Q}$

Th 38 Toute extension de degré fini de $\mathbb{Q}$ est monogène.

Soit $d \in \mathbb{N}$, $\sqrt{d} \notin \mathbb{Q}$.

Prop 39 $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ est une extension de degré 2 de $\mathbb{Q}$. On dit que c'est un corps de nombre quadratique.

~~Def 40 Soit ... de $\mathbb{Q}$ ... dans K, où ...~~

Ex ~~Prop~~ 40 $\mathbb{Q}(\omega)$, où ω est une racine primitive n-ième de l'unité, est appelée corps cyclotomique.

Prop 41 $[\mathbb{Q}(\omega) : \mathbb{Q}] = \varphi(n)$

C – Le cas de $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$.

DEV 1

Prop 42 $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ est euclidien, ses inversibles sont $\{\pm 1\}$, et $i\sqrt{2}$ y est irréductible.

Prop 43 26 est le seul entier entre un carré et un cube.

Rem 44 Le problème du seul entier entre un cube et un carré est plus difficile.

III Problème de carrés

A – Dans $\mathbb{Z}$.

Prop 45 $\mathbb{Z}[i]$ est un anneau euclidien

Prop ~~App Th~~ 46 Si n et m sont somme de deux carrés, nm l'est.

Th 47 p est somme de deux carrés ssi $p = 1$ ou $2\ [4]$.

Th 48 n est somme de deux carrés ssi $v_p(n) \equiv 0\ [2]$ dès que $p \equiv -1\ [4]$

Th 49 Tout entier naturel est somme de 4 carrés (Bachet–Lagrange)

B Dans $\mathbb{F}_p$

Def 40 On définit $\left(\frac{n}{p}\right)$ par : 0 si $n \equiv 0\ [p]$, 1 si $n \neq 0$ est un carré de $\mathbb{F}_p$, -1 sinon.

Ex 41 $\left(\frac{2}{7}\right) = 1$.

Th 42 $\left(\frac{n}{p}\right) = n^{\frac{p-1}{2}}\ [p]$.

Th 43 $\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{(p-1)(q-1)}{4}}$

et p et q sont premiers impairs

C Dans $\mathbb{F}_q$

Prop 44 α est un carré dans $\mathbb{F}_q$ si et seulement $\alpha^{\frac{q-1}{p-1}}$ est un carré dans $\mathbb{F}_p$.

Rem 45 On ne remontera ainsi à B.

IV Construction à la règle et au compas.

Def 46 Un point du plan est dit constructible en une étape à partir d'un ensemble E si il est intersection de deux droites, ou deux cercles, ou d'une droite et un cercle.

Def 47 Un point P est dit constructible en n étapes si il existe $P_1, \dots, P_n = P$ une suite de points tels que P_i soit constructible en une étape à partir de $E \cup (P_j, j < i)$.

Def 48 P est dit constructible si P est constructible en $n \in \mathbb{N}$ étapes à partir de $E = \{(0,0), (0,1)\}$

Prop 49 On note $\mathcal{C}$ les points constructibles. Alors $\mathcal{C}$ est un corps stable par racine carrée.

App 50 $-\frac{2}{3}$, $\sqrt{2}$, $\frac{2+3\sqrt{2}+\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$ sont constructibles à la règle et au compas

DEV 2

Th ~~Prop~~ 51 $x \in \mathbb{R}$ est constructible si et seulement si x est au sommet d'une tour d'extension quadratique de $\mathbb{Q}$.

Cor 52 Si x est constructible, $[\mathbb{Q}(x) : \mathbb{Q}] = 2^n$ où $n \in \mathbb{N}$

App 53 La quadrature du cercle, la duplication ~~possed~~ du cube sont des problèmes impossibles.

Def 54 On dit qu'un polygone régulier à n côtés est constructible si $\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ l'est

Prop 55 Un polygone régulier à n côtés est constructible ssi $n = 2^\alpha \prod p_i$ où les p_i sont des nombres premiers de Fermat distincts.