Préparation à l'agrégation

Leçons 201, 236,239, 250, (234,235)

Inversion de Fourier dans la classe de Schwartz

MIANNAY Matteo
https://perso.eleves.ens-rennes.fr/people/matteo.miannay (lien cliquable)

1 Ce qu'on va montrer

Nous allons montrer que l'inversion de Fourier est une bijection quand définie sur la classe de Schwarz. On rappelle que cette dernière est définie par :

$$\mathcal{S} = \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \forall (n,p) \in \mathbb{N}^2, \sup_{x \in \mathbb{R}} |(1+x^2)^n f^{(p)}(x)| < \infty \right\}.$$

C'est l'espace des fonctions C^∞ à décroissance rapide, ainsi que leur dérivée. C'est un espace métrisable, avec une famille de semi-normes, et pour cette métrique, il est complet. Il contient les fonctions continues à support compact, donc il est dense dans tous les L^p. Se renseigner un peu sur tout ça est sûrement une bonne idée pour avoir l'air malin face aux jurys dans beaucoup de leçons, et parler de classe de Schwarz dans les leçons espaces de fonctions et transformée de Fourier montre qu'on a pris un peu de hauteur. C'est bien fait dans "Chemins d'analyse de Daniel Chiron". En plus c'est joli et pas dur.

Pour prouver l'inversion de Fourier dans la classe de Schwartz, nous allons étudier des opérateurs de cette classe. Ca va être joli, et cosy, alors accrochez vos ceintures ! $\mathcal{S}$

2 Préliminaires

On pose M l'opérateur de la classe de Schwartz suivant :

$$\begin{array}{rccc} M & : & E & \longrightarrow & F \\ & & f & \longmapsto & \Big(x \mapsto xf(x)\Big) \end{array}$$

On montre sans soucis que $\mathcal{S}$ est stable par M. De même, on montre facilement que $\mathcal{S}$ est stable par la dérivation, la transformée de Fourier, et la transformée de Fourier inverse. C'est très bien détaillé dans un Max de Maths de Maxime Zavidovique, vous pouvez le faire dans les leçons plus orientées intégrales, mais ce n'est pas obligatoire. Ca dépend aussi de votre vitesse. Bref, c'est modulable.

On récupère au passage les formules suivantes, essentielles : $(\mathcal{F}(f))' = (-i)\mathcal{F}(M(f))$, et on tire avec celle-ci par récurrence : $\forall p \in \mathbb{N}, (\mathcal{F}(f))^{(p)} = (-i)^p \mathcal{F}(M^p(f))$. De même, on récupère : $(\mathcal{F}(f))' = iM(\mathcal{F}(f))$, d'où : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{F}(f^{(n)}) = i^n M^n(\mathcal{F}(f))$. Voilà pour la partie pas agréable (mais très simple), en route pour de jolies choses.

3 Le lemme de factorisation de Hadamard

Résultat très classique, qui se montre vite, et peut se voir comme une étude de l'opérateur M.

Théorème 1 (Lemme de factorisation de Hadamard)**.** *Soit $f \in C^{+\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, telle que $f(0) = 0$. Alors il existe $g \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = xg(x)$.*

Remarque 2. *Ce lemme se généralise en remplaçant C^∞ par C^k. On trouve alors une fonction g de classe C^{k-1}. La preuve est la même.*

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$. On écrit $f(x) - f(0) = f(x) = \displaystyle\int_0^x f'(t)dt$. Alors en posant $t = xu$, on obtient $f(x) = x \displaystyle\int_0^1 f'(xu)du$. Le théorème de régularité des intégrales à paramètres s'applique alors automatiquement sur tout compact, et $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 f'(xu)du$ convient. □

4 Qui commute avec M ?

On cherche les opérateurs de la classe de Schwartz qui commutent avec M.

Théorème 3 (Commutant de M)**.** *Si L est un opérateur de la classe de Schartz commutant avec M, alors L est de la forme $L : f \longmapsto \varphi f$, où φ est C^∞.*

Démonstration. Soit L un tel opérateur, f et $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $x_0 \in \mathbb{R}$. On suppose de plus que $f(x_0) = g(x_0)$. Alors $(f - g)(x_0) = 0$. On peut donc en appliquant le lemme de factorisation de Hadamard (en x_0, pas en 0, mais c'est pareil !) trouver une fonction $h \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, (f-g)(x) = (x-x_0)h(x)$. On remarque (on ne le détaille pas) que $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Ca vient du fait que pour $x \neq x_0$, on ait : $h(x) = \dfrac{(f-g)(x)}{x - x_0}$, et de dérivations successives (formule de Leibniz).

Bref, comme $\forall x \in \mathbb{R}, (f-g)(x) = (x-x_0)h(x)$, on a : $f - g = (M - x_0 I_d)h$, donc, comme L et M commutent : $L(f-g) = (M - x_0 I_d)L(h)$. En évaluant en x_0, le terme de droite est nul, et on trouve : $L(f)(x_0) = L(g)(x_0)$. Reprenons un peu : on a pris deux fonctions quelconques qui ont pour seules propriétés de prendre la même valeur en x_0, et on a montré que dans ce cas, $L(f)(x_0) = L(g)(x_0)$. Ceci nous dit donc que $L(f)(x_0)$ ne dépend que de $f(x_0)$.

On est alors prêts à conclure : il suffit de prendre $f_1 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ qui ne s'annule pas (par exemple $x \mapsto e^{-x^2}$), puis de poser :

$$\varphi : x \longmapsto \frac{L(f_1)(x)}{f_1(x)}.$$

On a alors bien $L(f) = \varphi f$ pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. En effet, si $x \in \mathbb{R}$, alors avec $a = \dfrac{f(x)}{f_1(x)}$ on a f et af_1 qui coincident en x, donc avec ce qui précède :

$$L(f)(x) = aL(f_1)(x) = \frac{f(x)}{f_1(x)} L(f_1)(x) = f(x)\varphi(x)$$

. □

5 Et si en plus on commute avec la dérivation ?

On suppose maintenant que L commute avec M et la dérivation. On regarde ce qu'il se passe : on se donne $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a alors : $L(f) = \varphi * f$ car L commute avec M, et $(L(f))' = (\varphi f)' = \varphi' f + f'\varphi$ d'une part, mais aussi $(L(f))' = L(f') = \varphi f'$ (on a utilisé la commutativité avec la dérivée ici). On a donc $\varphi' f + f'\varphi = \varphi f'$. Donc $\varphi' f = 0$, et ce pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Comme la classe de Schwartz contient les fonctions tests, on en déduit que $\varphi' = 0$, donc que φ est une fonction constante.

6 Le rapport avec la choucroute ?

Nous allons montrer que $\bar{\mathcal{F}}\mathcal{F}$ vérifie ces hypothèses ($\bar{F}$ désigne la transformée de Fourier inverse). Nous allons utiliser les formules vues toute à l'heure. On se convainc aisément qu'on a les mêmes formules pour $\bar{\mathcal{F}}$, avec pour seule différence que on rajoute un $-$ derrière les i, c'est à dire qu'on a que $\bar{F}(M(f)) = -i(\bar{F}(f))'$ et $\bar{F}(f') = -iM(\bar{F}(f))$.

On fixe $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Alors d'une part :

$$\bar{\mathcal{F}}(\mathcal{F})(Mf) = i\bar{F}((\mathcal{F}(f))' = M(\bar{\mathcal{F}}(\mathcal{F}(f))),$$

donc $\bar{\mathcal{F}}(\mathcal{F})$ commute avec M. D'autre part :

$$\bar{\mathcal{F}}\mathcal{F}(f') = -i\bar{\mathcal{F}}\Big(M(\mathcal{F}(f))\Big) = \Big(\bar{F}\mathcal{F}(f)\Big)'$$

.

Donc $\bar{\mathcal{F}}\mathcal{F}$ commute avec M et la dérivation, donc c'est l'identité à une constante près.

Il reste alors à déterminer cette constante (qui dépendera de la convention que vous prenez pour votre transformée de Fourier ! ce qui précède ne dépend pas de la convention néanmoins). Pour cela, on calcule la transformée de Fourier de la gaussienne,qui est bien dans la classe de Schwartz. On peut la calculer avec un équa diff, le théorème des résidus, ou autre ; c'est pas compliqué et c'est fait partout (dans le El Amrani en particulier). On est même pas obligés de le faire dans certaines leçons je pense, on peut juste l'utiliser directement et hop, on a une question gratuite, mais dans certaines leçons c'est bien de faire le cacul en deux minutes (genre "illustrer des méthodes de calculs d'intégrales").

7 Ca se trouve où ?

C'est très bien fait dans "Un max de Maths" de Maxime Zavidovique.

8 Recasages

Il y a de quoi faire. Déjà, 201 Espaces de fonctions, si on fait une partie sur la classe de Schwartz. 239 : Intégrales à paramètres : clair ! 236 : Illustrer des méthodes de calculs d'intégrales : c'est mentionné dans le rapport de jury donc oui. Il faut juste détailler le cacul de la gaussienne à la fin. 250 Transformée de Fourier : claro !

Maintenant, les plus débattables :

234, Espaces de fonctions Lebesgue intégrable : peut être, je ne sais pas. Le problème c'est qu'on utilise pas d'espaces L^p, mais en même temps, on déduit facilement de ce résultat l'inversion de

Fourier dans L^2 ; donc pourquoi pas... C'est vraiment si on a pas mieux. Ensuite, 235, Interversion de symboles en analyse : oui, on fait commuter des opérateurs (c'est intervertir finalement !), on fait des interversions d'intégrales pour justifier la stabilité de l'espace par M, Fourier, et la dérivation. Le lemme d'Hadamard de factorisation de la classe C^k relève un peu de la philosophie interversion de symboles aussi je trouve. Ca se défend je trouve.