Préparation à l'agrégation

Leçons 223 226 228

Théorème de Sharkovski

Aussi orthographié Charkowski, Sarkowski, Sarkovskii, Šarkovskii's, Sharkovskiy.

MIANNAY Matteo
https://perso.eleves.ens-rennes.fr/people/matteo.miannay (lien cliquable)

[Inspiré de Cassini oraux X-ENS, Xavier Carruso, Benjamin Havret]

1 Contexte

On considère I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, et $f : I \longrightarrow I$ continue.

Définition 1. *On dit que x est un point périodique pour f si la suite définie par $u_0 = x, u_{n+1} = f(u_n)$ est périodique.*

On montre alors le théorème suivant :

Théorème 2. *Si f admet un point de période 3, alors f admet un point de période n pour tout $n \geqslant 1$.*

On peut reformuler le théorème ainsi : **3-cycle $\implies$ chaos**.

Ce théorème est un cas particulier du résultat suivant, qui est le vrai "théorème de Sarkovski".

Définition 3. *On définit l'ordre de Sarkovski sur $\mathbb{N}$ ainsi : On range d'abord les impairs dans l'ordre, puis les impairs fois deux, puis les impairs fois 2^2, et ainsi de suite. On termine alors par les puissances de 2 dans l'ordre décroissant (1 est le plus grand élément pour cette relation d'ordre).*

Un dessin vaut mieux que de longs discours :

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & 3 & \lhd & 5 & \lhd & 7 & \lhd & 9 & \lhd & 11 & \lhd \ldots \lhd & (2n+1)\cdot 2^0 & \lhd \ldots \\
\lhd & 3\cdot 2 & \lhd & 5\cdot 2 & \lhd & 7\cdot 2 & \lhd & 9\cdot 2 & \lhd & 11\cdot 2 & \lhd \ldots \lhd & (2n+1)\cdot 2^1 & \lhd \ldots \\
\lhd & 3\cdot 2^2 & \lhd & 5\cdot 2^2 & \lhd & 7\cdot 2^2 & \lhd & 9\cdot 2^2 & \lhd & 11\cdot 2^2 & \lhd \ldots \lhd & (2n+1)\cdot 2^2 & \lhd \ldots \\
\lhd & 3\cdot 2^3 & \lhd & 5\cdot 2^3 & \lhd & 7\cdot 2^3 & \lhd & 9\cdot 2^3 & \lhd & 11\cdot 2^3 & \lhd \ldots \lhd & (2n+1)\cdot 2^3 & \lhd \ldots \\
 & \vdots & & & & & & & & & & & \\
\ldots \lhd & 2^n & \lhd \ldots \lhd & 2^4 & \lhd & 2^3 & \lhd & 2^2 & \lhd & 2 & \lhd & 1. &
\end{array}$$

Théorème 4 (Sharkovski). *Si $n \lhd m$ dans l'ordre de Sharkovski, alors l'existence d'un point n-périodique implique l'existence d'un point m périodique.*

La preuve est élémentaire, utilise des résultats combinatoires, et pourrait être accessible au lycée. Néanmoins, elle est longue, nous nous contenterons du cas $n = 3$. Ce document mériterait plus de dessins et de schémas, si je deviens bon un jour en la matière, je le compléterai avec.

2 Notations et premiers résultats

La fonction f fixée est toujours la même. On se permettra de nommer nos intervalles I (l'intervalle fixé pour f ne réapparaîtra pas)

Définition 5. *Soit I et J des segments. On dit que I f-recouvre J si $f(I) \supset J$. On notera $I \rightsquigarrow J$.*

On a la propriété suivante, vue mainte et mainte fois en sup :

Propriété 6. *Si $I \rightsquigarrow I$, f admet un point fixe sur I.*

On a aussi :

Propriété 7. *Si $I \rightsquigarrow J$, il existe $K \subset I$ un segment tel que $f(K) = J$.*

Un dessin rend la démonstration évidente. On note $J = [a, b]$, α, β des antécédents de a et b par f dans I. On prend $u = max\{x \in [\alpha, \beta], f(x) = a\}$ et $v = min\{x \in [u, \beta], f(x) = b\}$. Alors $[u, v]$ convient clairement. Justifions le : Si $f([u, v]) \not\supset J$, disons qu'il existe $t < a$, $t \notin f([u, v])$, alors il existe un point dans $[t, v]$ tel que $f(c) = a$, ce qui contredit la maximalité de u. Encore une fois, un dessin convient. Exercice : trouver toutes les interventions du TVI...

Propriété 8. *Supposons que l'on ait le cycle de recouvrement suivant : $I_0 \rightsquigarrow I_1 \rightsquigarrow \cdots I_{n-1} \rightsquigarrow I_0$. Alors il existe $x \in I_0$ tel que $f^n(x) = x$, et $f^k(x) \in I_k$ pour tout $0 \leqslant k \leqslant n-1$.*

Démonstration. Le lemme précédent donne l'existence d'un segment $J_1 \subset I_1, f(J_1) = I_1$. Et comme $f^2(J_1) \supset f(J_1) \supset I_1$, il existe $J_2 \subset J_1, f^2(J_2) = I_2$. On répète l'opération jusqu'à obtenir $J_n, f^n(J_n) = I_0$. En particulier, $f^n(J_n) \supset J_n$, et f^n a donc un point fixe sur J_n par le lemme, notons le x. On a alors $f^k(x) \in f^k(J_n) \subset f^k(J_k) = I_k$, ce qui conclut. $\square$

Il faut détailler ce que l'on fait, c'est le passage le plus délicat : on pourrait être tenté de dire : $I_0 \rightsquigarrow I_0$, prendre un $x_n \in I_0$ et lui prendre des antécédents successifs. Le problème, c'est que rien ne dit qu'on retombe bien sur $x_0 = x_n$. on trouve des segments emboîtés vérifiant $f^k(J_k) = I_k$, c'est ce qui fait que ça marche.

3 Preuve du théorème

Soit a un point d'ordre 3. On note $b = f(a), c = f^2(a)$. par symétrie des rôles, on peut supposer $a < b$ et $a < c$. (remarque : on ne peut pas supposer $a < b < c$) Traitons d'abord le cas où $a < b < c$. On note $I_0 = [a, b]$, $I_1 = [b, c]$. Le TVI indique que $I_0 \rightsquigarrow I_1$, $I_1 \rightsquigarrow I_0$ et $I_1 \rightsquigarrow I_1$.

$I_1 \rightsquigarrow I_1$ donne l'existence d'un point fixe, donc d'un cycle d'ordre 1. On a le cycle de recouvrement $I_0 \rightsquigarrow I_1 \rightsquigarrow I_0$. Donc par la propriété vue précédemment, on a $x \in I_0$ tel que $f^2(x) = x$. Si $f(x) = x$, alors $x \in I_0 \cap I_1$ et $x = b$, or $f(b) = c \neq b$. Donc x est bien un point 2-périodique.

Pour $n \geqslant 4$, on a $I_0 \rightsquigarrow I_1 \rightsquigarrow I_1 \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow I_0$, où I_1 apparaît $n-1$ fois. Donc f^n admet un point fixe dans I_0 tel que $f^k(x) \in I_k$ pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$ par la propriété. A nouveau, $x \neq f^k(x)$ pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$ car alors $x \in I_0 \cap I_1$ et $x = b$ or $a = f^2(b) \neq I_1$. On a donc trouvé un cycle d'ordre n.

4 Ca se trouve où ?

Oraux X ENS, Analyse 1 ou 2 je sais plus (celui qui fait de l'analyse réelle)

5 Et les recasages ?

Toutes les leçons de suite, continuité dérivabilité. C'est original, intéressant, et ça se présente super bien. Le théorème peut se démontrer en assez peu de temps. Ca laisse le temps de parler du théorème général - ce qui devrait intéresser le jury - ou encore de donner un exemple (dans le Cassini, l'exercice qui suit le développement est un exemple non trivial et très intéressant qui peut amener à des questions.)