Équivalent de Stirling par la méthode de Laplace

Janin Martin

18 juin 2024

1 Lemme de Watson

Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue, intégrable au voisinage de 0 et à croissance au plus exponentielle en l'infini. On suppose de plus que f admet un développement asymptotique en 0 :

$$f(x) = a_0 x^{\alpha_0} + \ldots + a_n x^{\alpha_n} + O_0(x^{\alpha_{n+1}}) \qquad -1 < \alpha_0 < \ldots < \alpha_{n+1}$$

Calculons un DA de $\mathcal{L}(f)$ en l'infini

Remarque 1. Intuitivement, lorsque $x \mapsto \infty$, Le comportement de $\int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t)dt$ est dicté par celui de f en 0 car e^{-xt} devient négligeable sauf en 0. On aplati la fonction f par une fonction exponentielle de plus en plus marquée.

1.1 La queue de l'intégrale est négligeable

Soit $b > 0$ et x au voisinage de ∞

$$\begin{array}{lrcl} & \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t)dt & = & \int_0^b e^{-xt} f(t)dt + \int_b^{+\infty} e^{-xt} f(t)dt \\ \text{Or} & |\int_b^{+\infty} e^{-xt} f(t)dt| & \leqslant & \int_b^{+\infty} e^{-xt} A e^{at} dt \\ & & \leqslant & \frac{A}{x-a} e^{a-x} b = o_\infty(e^{-xb}) \\ \text{D'où} & \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t)dt & = & \int_0^b e^{-xt} f(t)dt + o_\infty(e^{-xb}) \end{array}$$

1.2 Etude au voisinage de 0

On note $\epsilon(x) := f(x) - (a_0 x^{\alpha_0} + \ldots + a_n x^{\alpha_n})$. Alors

$$\begin{array}{rcl} \int_0^b e^{-xt} f(t)dt & = & \sum_{k=0}^n a_k \int_0^b t^{\alpha_k} e^{-xt} dt + \int_0^b \epsilon(t) e^{-xt} dt \\ & := & S + T \end{array}$$

Or

$$\begin{array}{lrcll} & \int_0^b t^{\alpha_k} e^{-xt} dt & = & \int_0^b (\frac{u}{x})^{\alpha_k} e^{-u} \frac{1}{x} du & \\ & & = & \frac{\Gamma(\alpha_{k+1})}{x^{\alpha_k+1}} + o_\infty(e^{-xb}) & \text{par 1.1} \\ \text{Donc} & S & = & \sum_{k=0}^n a_k \frac{\Gamma(\alpha_{k+1})}{x^{\alpha_k+1}} + o_\infty(e^{-xb}) & \end{array}$$

Pour le reste R, comme ϵ est négligeable devant $x^{\alpha_{n+1}}$ en 0 et continue sur $[0, b]$, il existe $C > 0$ tel que

$$\begin{array}{rcll} |R| & \leqslant & \int_0^b C t^{\alpha_{n+1}} e^{-xt} dt & \\ & \leqslant & C \frac{\Gamma(\alpha_{n+1}+1)}{x^{\alpha_{n+1}+1}} + O_\infty(e^{-bx}) & \\ & = & O_\infty(\frac{1}{x^{\alpha_{n+1}+1}}) & \text{Comme précédemment} \end{array}$$

1.3 Conclusion

Finalement

$$\mathcal{L}(f) = \sum_{k=0}^n a_k \frac{\Gamma(\alpha_{k+1})}{x^{\alpha_k+1}} + O_\infty(\frac{1}{x^{\alpha_{n+1}+1}})$$

2 Méthode de Laplace appliquée à la fonction Gamma

Le lemme de Watson permet l'étude des intégrales de Laplace, c'est à dire les intégrales de la forme $\int e^x \varphi(t) f(t) dt$ où φ est une fonction régulière. Intuitivement, le comportement en l'infini d'une telle intégrale est dicté par le comportement de f au voisinage des maximum de φ.

Plutôt que de décrire la méthode générale, on va l'appliquer à la fonction Γ pour retrouver l'équivalent de Stirling.

2.1 Introduction

Soit x au voisinage de l'infini, par définition $\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt$. Pour se ramener à une intégrale de Laplace, on fait le changement de variable $u = t/x$. On obtient $\Gamma(x+1) = x^{x+1} \int_0^{+\infty} e^{x(\ln u - u)} du$. On pose alors $\varphi(u) := \ln u - u$. La fonction φ possède un maximum en 1. Etudions d'abord l'intégrale à droite de ce maximum.

2.2 Changement de variable

On veut se ramener à une transformée de Laplace. Il est donc naturelle d'effectuer le changement de variable $v = -\varphi(u)$. $u \mapsto -\varphi(u)$ est bien continue et bijective de $[1, +\infty[$ dans $[1, +\infty[$. Par théorème d'inversion c'est un difféomorphisme de $]1, +\infty[$ sur lui même et on peut faire le changement de variable.

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} e^{x\varphi(u)} du &= \int_1^{+\infty} e^{-xv} (-\varphi^{-1})'(-v) dv \\ &= -e^{-x} \int_0^{+\infty} e^{-xv} (\varphi^{-1})'(-v-1) dv \end{aligned}$$

Pour appliquer le lemme de Watson il faut maintenant vérifier ses hypothèses et calculer un DA en 0 de $f(v) := (\varphi^{-1})'(-v-1)$.

2.3 Etude de f

Soit v dans $]1, +\infty[$,

$$f(v) = \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(-v-1))} = \left(\frac{1}{\varphi^{-1}(-v-1)} - 1 \right)^{-1}$$

Tout d'abord, en l'infini, on a $\lim_{+\infty} \frac{\varphi(u)}{u} = -1$ donc par continuité de φ et φ^{-1}, $\lim_{+\infty} \frac{\varphi(\varphi^{-1}(-v-1))}{\varphi^{-1}(-v-1)} = -1$ et $\varphi^{-1}(-v-1) \sim_{+\infty} -v$. Finalement $f(v) \sim_{+\infty} v$ et f est bien à croissance sous-exponentielle.

Calculons maintenant un DA en 0 de $g(v) := \varphi^{-1}(-v-1)$. Par continuité de g, il existe ϵ définie au voisinage de 0 telle que $g(v) = 1 + \epsilon(v)$ et $\epsilon(v) = o_0(1)$. Ainsi

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}(-v-1) &= 1 + \epsilon(v) \\ \text{et en appliquant } \varphi \qquad -v-1 &= \ln(1+\epsilon(v)) - 1 - \epsilon(v) \\ &= \epsilon(v) - \tfrac{\epsilon(v)^2}{2} + O_0(\epsilon(v)^3) - 1 - \epsilon(v) \\ v &= \tfrac{\epsilon(v)^2}{2} + O_0(\epsilon(v)^3) \end{aligned}$$

Ainsi d'une part comme $\epsilon(v) = o_0(1)$ et que ϵ ne s'annule pas (car φ^{-1} est bijective) en divisant par $\epsilon(v)^2$ on obtient $\frac{2v}{\epsilon(v)^2} = 1 + O_o(\epsilon(v))$ donc $\epsilon(v) \sim_0 (2v)^{1/2}$. D'autre part en réinjectant cet équivalent dans l'égalité précédente on obtient

$$\begin{aligned} \tfrac{\epsilon(v)^2}{2} &= v + O_0(v^{3/2}) \\ \epsilon(v) &= (2v + O_0(v^{3/2}))^{1/2} \\ \epsilon(v) &= (2v)^{1/2} + O_0(v) \end{aligned}$$

Et finalement $g(v) = 1 + 2^{1/2} v^{1/2} + O_0(v)$. On en conclut

$$\begin{aligned} f(v) &= \left(\tfrac{1}{1+2^{1/2}v^{1/2}+O_0(v)} - 1 \right)^{-1} \\ &= (-2^{1/2} v^{1/2} + O_0(v))^{-1} \\ &= \tfrac{-1}{\sqrt{2}} v^{-1/2} + O_0(1) \end{aligned}$$

2.4 Application du lemme de Watson

Le lemme de Watson appliqué à $\int_0^{+\infty} e^{-xv}(\varphi^{-1})'(-v-1)dv$ donne donc :

$$\begin{array}{rcl} \int_0^{+\infty} e^{-xv}(\varphi^{-1})'(-v-1)dv & = & \frac{-1}{\sqrt{2}}\frac{\Gamma(1/2)}{x^{1/2}} + O_{+\infty}(\frac{1}{x}) \\ \int_1^{+\infty} e^{x\varphi(u)}du & = & \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}\frac{e^{-x}}{x^{1/2}} + o_{+\infty}(e^{-x}) \end{array}$$

On procède le même manière pour calculer $\int_0^1 e^{x\varphi(u)}du$ et on trouve le même résultat. Finalement $\int_0^{+\infty} e^{x\varphi(u)}du = \sqrt{2\pi}\frac{e^{-x}}{x^{1/2}} + o_{+\infty}(e^{-x})$. Et en conclusion

$$\Gamma(x+1) \sim_{+\infty} x^x e^{-x}\sqrt{2\pi x}$$