Développement : Endomorphismes semi-simples

MATHIEU Alix - alix89.mathieu@gmail.com

Sommaire

1 Pré-requis **1**

2 Développement **2**

3 Remarques et bibliographie **3**

1 Pré-requis

Définition 1.1 : (Endomorphisme semi-simples)
Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On dit que u est un endomorphisme semi-simple si pour tout F sous-espace vectoriel de E stable par u, il existe S un supplémentaire de F dans E stable par u

Lemme 1.2 :
Soit $p \geq 2$ et $M_1, \cdots, M_p \in \mathbb{K}[X]\backslash\{0\}$ 2 à 2 premiers entre eux et $M = \prod_{j=1}^{p} M_j$. Alors

$$\ker(M(u)) = \bigoplus_{i=1}^{p} \ker(M_j(u))$$

et les projecteurs sur les sous-espaces $\ker(M_j(u))$ sont des polynômes en u.

Lemme 1.3 :
Si F est stable par u et $\pi_u = M_1 \ldots M_r$ où les M_i sont unitaires, distincts et irreductbles. Alors

$$F = \bigoplus_{i=1}^{r} [\ker(M_i(u)) \cap F]$$

Preuve :
▷ Par le lemme des noyaux, on a : $E = \bigoplus_{i=1}^{r} \ker(M_i(u))$ et $\pi_i : E \longrightarrow \ker(M_i(u))$ projection sur $\ker(M_i(u))$ est un polynôme en u.

▷ Comme F est stable par u et que $\pi_i(F) \subseteq \pi_i(E) = \ker(M_i(u))$, alors $\pi_i(F) \subseteq \ker(M_i(u)) \cap F$
▷ Or $Id_E = \pi_1 + \cdots + \pi_r$ et donc

$$F \subseteq \pi_1(F) + \cdots \pi_r(F) = \pi_1(F) \oplus \cdots \oplus \pi_r(F) \subseteq \ker(M_1(u)) \cap F \oplus \cdots \oplus \ker(M_r(u)) \cap F$$

D'où l'égalité, l'autre inclusion étant immédiate.

■

2 Développement

Proposition 2.1 :
Si π_u est irréductible alors u est semi-simple.

Preuve :
▷ Soit F un sev stable par u. Montrons l'existence d'un supplémentaire S stable par u.

→ Si $F = E$, c'est terminé en prenant $S = \{0\}$ qui est bien stable par u.
→ Sinon, considérons $x_1 \in E \backslash F$ et posons l'ensemble suivant qui est stable par u

$$E_{x_1,u} = \{P(u)(x_1), P \in \mathbb{K}[X]\}$$

Montrons que cet ensemble pourrait être un potentiel candidat de supplémentaire en commençant par montrer le caractère direct.

▷ Montrons que $E_{x_1,u} \cap F = \{0\}$. Pour se faire, on s'intéresse à l'ensemble

$$I_{x_1} = \{P \in \mathbb{K}[X], P(u)(x_1) = 0\}$$

qui est un idéal de $\mathbb{K}[X]$ principal, non réduit à $\{0\}$ car $\pi_u \in I_{x_1}$. Il est donc engendré par un élément $\pi_{x_1} \in \mathbb{K}[X]$. Or comme dit précedemment, on a $\pi_u \in I_{x_1} = (\pi_{x_1})$ donc $\pi_{x_1} \mid \pi_u$ et comme π_u est irréductible (et que $\pi_{x_1} \neq 1$ car $x_1 \neq 0$ étant dans $E \backslash F$) alors $\pi_u = \pi_{x_1}$ et donc π_{x_1} est irréductible.

Considérons $y \in E_{x_1,u} \cap F$, alors, il existe $P \in \mathbb{K}[X], y = P(u)(x_1)$. Maintenant supposons que $y \neq 0$. alors $P \notin I_{x_1} = (\pi_{x_1})$ donc $\pi_{x_1} \not| P$ et comme π_{x_1} est irréductible, alors π_{x_1} et P sont premiers entre eux. Comme $\mathbb{K}[X]$ est principal, par le théorème de Bezout :
Il existe $U, V \in \mathbb{K}[X], UP + V\pi_{x_1} = 1$ donc :

$$x_1 = U(u) \circ P(u)(x_1) + V(u) \circ \pi_{x_1}(u)(x_1) = U(u)(y)$$

Or $y \in F$ et comme F est stable par u alors par l'égalité au dessus, on devrait avoir $x_1 \in F$, ce qui est impossible. d'où le caractère direct.

▷ Si $F \oplus E_{x_1} = E$, c'est terminé en choisssant $S = E_{x_1}$. Sinon, on choisit $x_2 \in E \backslash (E_{x_1} \oplus F)$ et on recommence. On itère ainsi ce procédé qui se termine en un nombre fini d'itération car E est de dimension fini (et que $\dim(E_{x_i}) \geq 1$). Il existe donc $x_1, \ldots x_r$ tel que

$$E = F \oplus E_{x_1} \oplus \cdots \oplus E_{x_r}$$

et comme pour tout $i \in \{1, \cdots, r\}$, E_{x_i} est stabe par u alors $S = E_{x_1} \oplus \cdots \oplus E_{x_r}$ est stable par u et $F \oplus S = E$ ■

Théorème 2.2 :
u est semi-simple si et seulement si $\pi_u = M_1 \ldots M_r$ où les M_i sont unitaires, irréductibles et distincts

Preuve :
▷ Supposons que u soit semi-simple. Par l'absurde, supposons qu'il existe $M, N \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\pi_u = M^2N$ et posons $F = \ker(M(u))$ qui est un sev stable par u. Comme u est semi-simple, il existe un supplémentaire S de F stable par u. Montrons que $M(u) \circ N(u) = 0$ sur E ce qui contredira la minimalité de π_u

$\rightarrow$ Soit $x \in F, M(u) \circ N(u)(x) = N(u) \circ M(u)(x) = N(u)(0) = 0$ donc $MN(u)$ s'annule sur F

$\rightarrow$ Soit $x \in S$, d'un côté on a comme S est stable par u, $MN(u)(x) \in S$ mais en même temps $M(u) \circ MN(u)(x) = \pi_u(x) = 0$ donc $MN(u)(x) \in \ker(M(u)) = F$. Or $F \oplus E = S$ donc $F \cap S = \{0\}$. Ainsi $MN(u)(x) = 0$ donc $MN(u)$ s'annule sur S.

Comme $F \oplus S = E$, on a donc $MN(u)$ qui s'annulle sur E ce qui vient contredire la minimalité de π_u. Ainsi, $\pi_u = M_1 \dots M_r$ où les M_i sont unitaires, irréductibles et distincts.

$\triangleright$ Si $\pi_u = M_1 \dots M_r$ où les M_i sont unitaires, irréductibles et distinct. Considérons F un sev de E stable par u et notons $F_i = \ker(M_i(u))$ On a :

$$E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_r \text{ et } F = \bigoplus_{i=1}^{r} [F_i \cap F] \text{ par les lemmes préliminaires}$$

Or pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$, F_i est stable par u, $M_i(u_{F_i}) = 0$ or M_i est irréductible donc $\pi_{u_{F_i}} = M_i$ donc par la proposition 1, on a u_{F_i} est semi-simple.
Or $F \cap F_i$ est un sev de F_i stable par u_{F_i} semi-simple donc il existe S_i stable par u_{F_i} tel que

$$(F \cap F_i) \oplus S_i = F_i$$

Posons maintenant $S = S_1 \oplus \cdots S_r$, alors :

$$\begin{aligned} E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_r &= \bigoplus_{i=1}^{r} [(F \cap F_i) \oplus S_i] \\ &= \left[\bigoplus_{i=1}^{r} F_i \cap F \right] \oplus \left[\bigoplus_{i=1}^{r} S_i \right] \\ &= F \oplus S \end{aligned}$$

Or chaque S_i est stable par u_{F_i} donc S est stable par u ainsi u est semi-simple. ■

3 Remarques et bibliographie

Remarque

$\triangleright$ Il serait bon d'avoir des idées de preuve sur les résultats suivants utilisées dans le développement : Lemme des noyaux, $\mathbb{K}$ corps donc $\mathbb{K}[X]$ principal, dans un anneau principal le théorème de Bezout

$\triangleright$ La notion d'endomorphisme semi-simple vient généraliser la notion de diagonalisabilité. En effet on a les résultats suivants :

1. u est diagonalisable si et seulement si il est semi-simple et son polynôme caractéristique est scindé dans $\mathbb{K}$.
2. Dans un corps algébriquement clos, u semi-simple ssi u diagonalisable
3. On peut donner une version du théorème de dunford avec des endomorphismes semi-simples

Bibliographie : Gourdon - Analyse