Décomposition Polaire sous forme $\exp(i\Theta)R$

Jérôme BUISSON

1 Introduction

Le résultat démontré est le suivant : *Soit $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, alors il existe une matrice $\Theta \in \mathbb{H}_n(\mathbb{C})$ hermitienne et une matrice hermitienne positive $R \in \mathbb{H}_n(\mathbb{C})^+$ telle que $A = \exp(i\Theta)R$. De plus si $A \in \mathbb{GL}_n(\mathbb{C})$ alors R et $exp(i\Theta)$ sont uniques mais pas Θ.*

Ceci, permet de généraliser la forme polaire bien connue sur $\mathbb{C}, z = re^{i\theta}$. En effet en dimension 1 une matrice hermitienne est un complexe θ qui vérifie $\overline{\theta} = \theta$ donc réel. Et en dimension 1 une matrice hermitienne positive est donc un nombre réel positif.

La partie unicité peut être omise pour question de temps. Grâce à La proposition 2 on peut mettre ce développement dans la leçon exponentielle complexe

Recasages :
- 155 - Exponentielle de matrices. Applications.
- 152 - Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.
- 154 - Exemples de décompositions de matrices. Applications.
- 157 - Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.
- 158 - Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie).

2 Développement

PROPOSITION 1 *Soit E un espace hermitien et $u \in L(E)$ un endomorphisme unitaire. Si F est un sev stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u*

Preuve : Soit $x \in F^\perp$ et $y \in F$. Comme $u_{|F}$ est une isométrie, $u_{|F}$ est bijective, donc il existe $y' \in F$ tel que $y = u(y')$. On a donc

$$< u(x), y >=< u(x), u(y') >=< x, y' >= 0$$

On en déduit que $F^\perp$ est bien stable par u

THEOREME 1 (Diagonalisation des endomorphismes unitaires) *Soit E un espace hermitien et $u \in L(E)$ un endomorphisme unitaire. Alors il existe une base orthonormale qui diagonalise u, et toutes les valeurs propres de u ont leur module égal à 1*

Preuve : Montrons par récurrence sur la dimension n que u est diagonalisable en base orthonormée.

Pour n=1 c'est immédiat car u est une homothétie Supposons la propriété vraie au rang n-1.

Le polynôme caractéristique de u est scindé sur $\mathbb{C}$ donc il existe au moins un vecteur propre x et une valeur propre λ.

$< x >$ est stable par u donc $< x >^\perp$ est stable par u car celui-ci est unitaire. $H :=< x >^\perp$ est de dimension $n-1$, on peut donc lui appliquer l'hypothèse de récurrence : il existe une base orthonormée de diagonalisation $(e_2, \ldots, e_n)$ de H. La base $(x/||x||, e_2, ..., e_n)$ est bien une base orthonormée de $\mathbb{C}^n$ de diagonalisation.

Montrons maintenant que les valeurs propres de u sont de module 1. Soit λ une valeur propre du x un vecteur propre (non nul). On a $||u(x)|| = |\lambda|.||x||$ mais aussi comme u est unitaire $||u(x)|| = ||x||$ soit $||x|| = \lambda||x||$. Comme x est non nul on en déduit que $|\lambda| = 1$

PROPOSITION 2 *L'exponentielle réalise une surjection de l'ensemble des matrices anti-hermitiennes* $\mathbb{AH}_n(\mathbb{C})$ *dans l'ensemble des matrices unitaires* $\mathbb{U}_n(\mathbb{C})$

Preuve :

Soit $U \in \mathbb{U}_n(\mathbb{C})$ et soit u l'endomorphisme unitaire associée dont U est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$ Il existe donc une matrice de passage unitaire P telle que $P^*UP = Diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ avec les λ_i de module 1. Il existe donc des θ_i tels que $P^*UP = Diag(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n})$. En posant $B = Diag(i\theta_1, \dots, i\theta_n)$ on a $\exp(B) = Diag(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n})$.

Finalement en posant $A = PBP^*$ on a

$$\exp(A) = \exp(PBP^*) = P\exp(B)P^* = PDiag(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n})P^* = PP^*UPP^* = U$$

Reste à vérifier que A est bien anti-hermitienne.En effet

$$B^* = Diag(-i\theta_1, \dots, -i\theta_n) = -Diag(i\theta_1, \dots, i\theta_n) = -B$$

Donc

$$A^* = (PBP^*)^* = (P^*)^*B^*P^* = -PBP^* = -A^*$$

PROPOSITION 3 *Soit* $A \in \mathbb{H}_n(\mathbb{C})^+$ *hermitienne positive, alors il existe une unique matrice* $B \in \mathbb{H}_n(\mathbb{C})^+$ *hermitienne positive telle que* $R^2 = A$

Preuve :

existence Par le théorème spectral, il existe une matrice unitaire P telle que $P^*AP = Diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = D$ avec les λ_i des réels positifs car A est positive.

En posant $D' = Diag(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$ on a $D'^2 = D$

$R = PD'P^*$ est hermitienne positive car ses valeurs propres dont positives par construction et

$$R^* = (PD'P^*)^* = P^{**}D'^*P^* = PD'P^* = R$$

Finalement on a bien :

$$R^2 = PD'P^*PD'P^* = PD'^2P^* = PDiag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)P^* = A$$

Unicité

Soient S et T hermitienne positives telle ques $S^2 = T^2 = A$. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ les valeurs propres de S et $(\mu_1, \dots, \mu_n)$ celles de T. Soit $L \in (C)[X]$ le polynome interpolateur de Lagrange défini par $L({\lambda_i}^2) = \lambda_i$ et $L({\mu_i}^2) = \mu_i$ pour tout i. D'après le théorème spectral, S et T sont diagonalisables : il existe donc P et Q inversibles telle ques $S = P^{-1}DP$ et $T = Q^{-1}UQ$ avec les matrices diagonales $D = Diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et $Diag(\mu_1, \dots, \mu_n)$. Ainsi

$$L(S^2) = L(P^{-1}D^2P) = P^{-1}L(D^2)P = P^{-1}Diag(L(\lambda_1^2), \dots, L(\lambda_n^2))P = P^{-1}DP = S$$

De même $L(T^2) = T$. Or $S^2 = T^2 = A$, donc S=T

THEOREME 2 *(Décomposition polaire) : Soit* $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$*, alors il existe une matrice* $\Theta \in \mathbb{H}_n(\mathbb{C})$ *hermitienne et une matrice hermitienne positive* $R \in \mathbb{H}_n(\mathbb{C})^+$ *telle que* $A = \exp(i\Theta)R$*. De plus si* $A \in \mathbb{GL}_n(\mathbb{C})$ *alors* R *et* $\exp(i\Theta)$ *sont uniques mais pas* Θ *.*

Preuve :

Première étape :

A^*A est hermitienne car $(A^*A)^* = A^*A^{**} = A^*A$.

De plus elle est positive car pour $X \in \mathbb{C}^n, X^*(A^*A)X = (AX)^*AX = ||AX||^2 \geq 0$.

Donc d'après la proposition 2 il existe une unique R hermitienne positive telle $R = A^2$.

Supposons A inversible, alors H est nécessairement inversible (car $Ker(H) \subset Ker(A)$). Maintenant $U := AR^{-1}$ est unitaire car

$$U^*U = H^{-1}A^*AH^{-1} = H^{-1}H^2H^{-1} = I_n$$

On a donc bien A=UR avec U unitaire et R hermitienne positive définies de manière unique.

Deuxième étape

Traitons le cas $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ par densité. Soit $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$. L'ensemble des matrices inversibles étant dense dans $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, il existe un suite $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ qui converge vers A.

D'après ce qui précède pour tout $p \in \mathbb{N}$ il existe U_p unitaire et R_p hermitienne positive telle que $Ap = U_pH_p$. L'ensemble des matrices unitaires étant compact il existe une suite extraite $(U_{\Phi(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ qui converge vers U unitaire. Comme pour tout $p \in \mathbb{N}, R_{\Phi(p)} = U^*_{\Phi(p)}A$ et par continuité du produit matriciel, et du transconjugué, $(R_{\Phi(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers $R = U^*A$.

Une limite de matrices hermitiennes positive est :

— hermitienne par continuité de l'application $A- > A^*$

— positive par continuité de l'application $A- > X^*AX$ pour $X \in \mathbb{C}^n$.

On en déduit que R est hermitienne positive et finalement on a bien A=UR avec U unitaire et R hermitienne positive.

Troisième étape

U étant unitaire d'après la proposition 2, il existe une matrice $T \in \mathbb{H}_n(\mathbb{C})$ anti-hermitienne telle que $U = \exp(T)$ Alors en posant $\Theta = -iT$, on a bien une matrice hermitienne car

$$\Theta^* = (-iT)^* = -\bar{i}T^* = i * (-T) = -iT = \Theta$$

On en déduit bien la forme annoncée $A = \exp(i\Theta)R$

Si A est inversible alors U est unique alors $\exp(i\Theta)$ aussi, mais il n'y a pas unicité de Θ.

Références

Xavier Gourdon - Les Maths en tête - Algèbre
Isenmann et Pecatte - L'oral à l'agrégation de mathématiques