Fonction de Bessel

Chen Thomas
t.chen.thomas1[at]gmail.com

17 mai 2024

Attention

1. Ce document contient certainement des coquilles. N'hésitez pas à me le signaler. De même si vous avez une question.
2. Pour les recasages, ce sont les miens mais ce développement se case peut-être ailleurs et je n'y ai pas réfléchi.
3. Il se peut que ce développement dure plus de 15 minutes. J'ai essayé de le découper pour faire des recollements personnalisés.

Leçons

- 221 : Equations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.
- 243 : Séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.

Références

[1] C. Deschamps, F. Moulin, etc. *Maths Tout-en-un MP/MP*-MPI/MPI**. Dunod, 2022.

[2] S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas. *Exercices de mathématiques. Oraux X-ENS, Analyse 4*. Cassini, 2012.

Tout est dans [2] et on peut quelque temps s'aider de [1].
Soit (E) l'équation différentielle $xy'' + y' + xy = 0$ sur $\mathbb{R}$.

***Proposition* 1.** Il existe une unique solution de (E) développable en série entière qui vaut 1 en 0. Toute autre solution définie sur $]0, \alpha[$ pour $\alpha > 0$ non proportionnelle à celle-ci est non bornée. On a d'ailleurs une expression intégrale de la fonction développable en série entière.

Démonstration. Soit $f = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Soit $x \in]-R, R[$.

$$xf''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1)x^{n-1} = \sum_{n=1} a_{n+1} n(n+1)x^n.$$

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1}(n+1)x^n.$$

$$xf(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}x^n.$$

Analyse : f est solution de (E) si, et seulement si

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_{n+1}n(n+1)+a_{n+1}(n+1)+a_{n-1}\right)x^n+a_1x^0=0$$

ce qui revient à demander par unicité des coefficients d'une série entière

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, a_{n+1}(n+1)^2+a_{n-1}=0, a_1=0.$$

Par récurrence, on a donc immédiatement

$$\forall n\in\mathbb{N}, a_{2n+1}=0\ ;\ a_{2n+2}=\frac{-a_{2n}}{[2(n+1)]^2}=\cdots=\frac{(-1)^{n+1}a_0}{2^{2(n+1)}(n+1)!^2}.$$

Si on impose $f(0)=1$ à savoir $a_0=1$, on a donc

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{4^n(n!)^2}x^{2n}.$$

Synthèse : soit f série entière définit ci-avant. Montrons que son rayon de convergence est strictement positif. Pour cela, le lemme d'Abel nous dit que $R=+\infty$. En effet, en notant $b_n=\begin{cases}\dfrac{(-1)^p}{4^p(p!)^2} & \text{si } n=2p\\ 0 & \text{si } n=2p+1\end{cases}$, la suite $(b_nR^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée pour tout $R>0$. Il suffit d'écrire

$$\forall p\in\mathbb{N}, n=2p, \frac{(-1)^p}{4^p(p!)^2}R^{2p}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0.$$

Par les calculs antérieurs à l'analyse, f est solution de (E) et $f(0)=1$: c'est ce qu'il fallait démontrer.

Soit g telle que (f,g) soit libre et g solution de (E). Soit $W($ wonskien de f,g, c'est-à-dire, $W=\begin{vmatrix} f & g\\ f' & g'\end{vmatrix}=fg'-f'g$. Alors $W(f,g)$ est dérivable de dérivée $W'=f'g'+fg''-f''g-f'g'$ donc $xW'=f(-g'-xg)-(-f'-xf)g=-fg'+f'g=-W$. Ainsi, $(xW)'$ est constant sur $]0,\alpha[$ donc il existe une constante réelle A tel que $\forall x\in]0,\alpha[, xW(x)=A$. A est non nulle : sinon, W est nulle ce qui contredit la liberté de (f,g). g étant bornée, je la prolonge en 0. Ainsi,

$$A=xf(x)g'(x)-xf'(x)g(x)\underset{x\to0^+}{\longrightarrow}xf(x)g'(x).$$

Puisque $f(x)\underset{x\to0^+}{\longrightarrow}1$, on a donc $g'(x)\underset{x\to0^+}{A}/x$. Soit $x_0\in]0,\alpha[$. Puisque $\displaystyle\int_0^{x_0}\frac{1}{t}\mathrm{d}t$ diverge, par théorème d'intégration d'équivalents, on a

$$g(x_0)-g(x)\underset{x\to0}{\sim}A(\ln(x_0)-\ln(x)).$$

Cela contredit le caractère bornée de g. Ainsi, par l'absurde, on a g non bornée.

Soit $J:x\in\mathbb{R}\mapsto\displaystyle\int_0^{\pi/2}\cos(x\sin(t))\mathrm{d}t$. Soit $f:(x,t)\in\mathbb{R}\times[0,\pi/2]\mapsto\cos(x\sin(t))\in\mathbb{R}$.

- $\forall t\in[0,\pi/2], x\mapsto f(x,t)\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$; $\forall t\in[0,\pi/2],\forall x\in\mathbb{R},\dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x)=-\sin(t)\sin(x\sin(t)),\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x)=-\sin^2\cos(x\sin(t))$.
- Pour tout x réel, ces dernières applications sont mesurables sur $[0,\pi/2]$.
- Domination : chacune de ces applications sont continues sur le segment $[0,\pi/2]$ donc dominée sur $[0,\pi/2]$.

Par le théorème de dérivation $\mathcal{C}^2$ sous le signe intégral, J est de classe $\mathcal{C}^2$ et

$$J'(x)=-\int_0^{\pi/2}\sin(t)\sin(x\sin(t))\mathrm{d}t\ ,\ J''(x)=-\int_0^{\pi/2}\sin^2\cos(x\sin(t))\mathrm{d}t.$$

Ainsi,

$$x(J''(x)+J(x)) = x\int_0^{\pi/2}(1-\sin^2(t))\cos(x\sin(t))\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2}\cos(t)(x\cos(t))\cos(x\sin(t))\mathrm{d}t.$$

On réalise une intégration par parties, on est en présence de deux fonctions $\mathcal{C}^1$: on intègre $t \mapsto (x\cos(t))\cos(x\sin(t))$ dont une primitive est $t \mapsto \sin(x\sin(t))$ et on dérive cos. On obtient alors

$$x(J''(x)+J(x)) = \underbrace{[\sin(x\sin(t))\cos(t)]_0^{\pi/2}}_{=0} + \int_0^{\pi/2}\sin(t)\sin(x\sin(t))\mathrm{d}t = -J'(x).$$

On a donc J solution de (E). De plus, J est bornée sur $\mathbb{R}$. Par précédent, $J = \lambda f$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Or, $J(0) = 1 = \lambda f(0) = \lambda$ donc $J = f$.

$\square$