Connexité de $\mathbb{R}$ et applications

Chen Thomas
t.chen.thomas1[at]gmail.com

17 mai 2024

Attention

1. Ce document contient certainement des coquilles. N'hésitez pas à me le signaler. De même si vous avez une question.
2. Pour les recasages, ce sont les miens mais ce développement se case peut-être ailleurs et je n'y ai pas réfléchi.
3. Il se peut que ce développement dure plus de 15 minutes. J'ai essayé de le découper pour faire des recollements personnalisés.

Leçons

- 204 : Connexité. Exemples d'applications.

Références

[1] X. Gourdon. *Analyse*. Ellipses, 2020.

Attention ! C'est un développement fait maison. On peut s'inspirer de [1].

Théorème 1.
Les connexes de $\mathbb{R}$ sont exactement les intervalles.

Démonstration. Les connexes sont des intervalles. En effet, soit $A \subset \mathbb{R}$, un connexe non vide. Soit $a, b \in A$ avec $a \leq b$. Soit $c \in [a, b]$. Supposons que $c \notin A$. Alors $c \neq a$ et $c \neq b$. Alors $A = (A \cap] - \infty, c[) \sqcup (A \cap]c, +\infty[)$. On a une partition de A en deux ouverts non vide car a est dans le premier, b dans le deuxième. Par contraposée, $[a, b] \subset A$ et ce, pour tout $a, b \in A$ donc A est un intervalle.

Les intervalles sont connexes. Soit $I \subset \mathbb{R}$, un intervalle. Supposons que $I = U \sqcup V$ avec U, V ouverts non vide de I. Il existe $a \in U, b \in V$. On peut supposer $a < b$. Considérons $E = \{x \in I : [a, x] \subset U\}$. E contient a et es majoré par b. Il admet donc un supremum noté $T \in \mathbb{R}$. On a $T \in [a, b] \subset I$.

Comme U est un fermé de I, il existe F fermé de $\mathbb{R}$ tel que $U = I \cap F$. On a $E \subset U \subset F$ donc $\overline{E} \subset F$ (adhérence dans $\mathbb{R}$) donc $T \in F$. Ainsi, $T \in I \cap F = U$ et $T < b$.

Comme U est un ouvert de I, il existe O ouvert de $\mathbb{R}$ tel que $U = I \cap O$. Alors $T \in U \subset O$ donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que $[T - \varphi, T + \varepsilon] \subset O$. Quitte à réduire ε, on peut supposer $T + \varepsilon < b$. Alors $[T, T + \varepsilon] \subset O$, $[T + T\varepsilon] \subset [a, b] \subset I$ donc $[T, T + \varepsilon] \subset O \cap I = U$. Mais alors $[a, T + \varepsilon] = [a, T] \cup [T, T + \varepsilon] \subset U$ donc $T + \varepsilon \in E$. Cela contredit la définition de T. Donc il n'existe pas de partition de I en ouverts donc I est connexe. $\square$

***Corollaire* 2** (Théorème des valeurs intermédiaires)**.**
Soit X, un espace topologie connexe et $f : X \to \mathbb{R}$ continue. Alors $f(X)$ est un intervalle. En particulier, s'il existe $x, y \in X$ tel que $f(x)f(y) \leq 0$, alors il existe $z \in X$ tel que $f(z) = 0$.

Démonstration. L'image d'un connexe par f application continue est une partie connexe de $\mathbb{R}$ donc un intervalle. Si $f(x)f(y) \leq 0$, alors $0 \in (f(x), f(y)) \subset f(X)$ donc 0 admet un antécédent par f dans X.

□

***Proposition* 3.**
Soit U, un ouvert de E CONNEXE. Soit $f : U \to E$ différentiable telle que $Df = 0$. Alors f est constante.

Démonstration. Soit $x_0 \in U$ et $\Omega = \{x \in U : f(x) = f(x_0)\}$. Alors Ω est fermé par continuité de f. Si $x \in U$, il existe $r > 0$ telle que $B(x,r) \subset U$. Alors $B(x,r)$ est convexe et $df_{|B(x,r)} = 0$ donc par l'inégalité des accroissements finis, f est constante sur $B(x,r)$. Ainsi, $B(x,r) \subset \Omega$ et Ω est donc ouverte. Ainsi, par connexité de U, $\Omega = \emptyset$ ou $\Omega = U$. Puisque $x_0 \in \Omega$, on a $\Omega = U$ donc $\forall x \in U, f(x) = f(x_0 : f$ est constante sur U.

□

Cela découle du théorème suivant que l'on va démontrer.

Théorème 4 (Inégalité forte des accroissements finis)**.**
Soit $a < b$. Soit $f : [a,b] \to F, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ avec F, un Banach. On suppose que f et g sont continues sur $[a,b]$, dérivables sur $]a,b[$ et que

$$\forall t \in]a,b[, \|f'(t)\| \leq g'(t).$$

Alors

$$\|f(b) - f(a)\| \leq g(b) - g(a).$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. On considère la fonction

$$\begin{array}{rccl} \varphi_\varepsilon : & [a,b] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \|f(x) - f(a)\| - (g(x) - g(a)) - \varepsilon(x-a). \end{array}$$

Par continuité de f et g en $[a,b]$, φ_ε est continue sur $[a,b]$. Notons

$$I_\varepsilon = \{x \in]a,b[: \varphi_\varepsilon(x) \leq \varepsilon\}.$$

Alors I_ε est fermé en tant qu'image réciproque du fermé $]-\infty, \varepsilon]$ par l'application continue $\varphi_{\varepsilon|]a,b[}$.

Déjà, $a \in I_\varepsilon \subset [a,b]$ donc I_ε est non vide, majoré, donc admet une borne supérieure notée $x \in [a,b]$. Donc $x \in I_\varepsilon$ car I_ε est fermé.

De plus, $\varphi_\varepsilon(a) = 0$ donc par continuité, il existe $\delta > 0$ tel que $\varphi_\varepsilon(a+\delta) \leq \varepsilon$ donc $a < a + \delta \leq x$.

Supposons par l'absurde que $x < b$ *i.e.* $x \in]a,b[$. Pour tout $h > 0$ assez petit,

$$\frac{\|f(x+h) - f(x)\|}{h} - \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \left\|\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right\| - \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} \|f'(x)\| - g'(x) \leq 0.$$

Il existe donc un $\delta > 0$ tel que si $0 \leq h \leq \delta$, alors

$$\|f(x+h) - f(x)\| - (g(x+h) - g(x)) \leq \varepsilon h.$$

Donc pour $h \in [0, \delta]$,

$$\begin{aligned} \varphi_\varepsilon(x+h) &= \|f(x+h) - f(x)\| - (g(x+h) - g(x)) - \varepsilon(x + h - a) \\ &\leq \underbrace{\|f(x+h) - f(x)\| - (g(x+h) - g(x)) - \varepsilon h}_{\leq 0} + \underbrace{\|f(x) - f(a)\| - (g(x) - g(a)) - \varepsilon(x-a)}_{\leq \varepsilon \text{ car } x \in I_\varepsilon}. \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Donc $[x, x+\delta[\subset I_\varepsilon$. Absurde car $\delta > 0$. Donc $b \in I_\varepsilon$. Ainsi, $\forall \varepsilon > 0, \|f(b) - f(a)\| \leq g(b) - g(a) + \varepsilon(b-a) + \varepsilon$. Donc $\|f(b) - f(a)\| \leq g(b) - g(a)$.

□

***Corollaire* 5.**
Soit $U \subset E$ CONVEXE et $f : U \to F$ différentiable. On suppose que $\forall x \in U, \|D_x f\| \leq M$ pour un certain $M \in \mathbb{R}$. Alors

$$\forall x, y \in U, \|f(y) - f(x)\| \leq M\|x - y\|.$$

Démonstration. Soit $x, y \in U$ et $\gamma : t \in [0,1] \mapsto x + t(y-x) \in U$. Alors $f \circ \gamma : [0,1] \to F$ est continue sur $[0,1]$, dérivable sur $]0,1[$ et

$$\forall t \in]0,1[, \|(f \circ \gamma)'(t)\| = \|D_{\gamma(t)} f \cdot \gamma'(t)\| \leq \|D_{\gamma(t)} f\| \|\gamma'(t)\| \leq M\|y - x\|.$$

Par l'inégalité des accroissements finis,

$$\|f(x) - f(y)\| = \|f \circ \gamma(1) - f \circ \gamma(0)\| \leq M\|y - x\|(1 - 0) = M\|y - x\|.$$

□