Densité des polynômes orthogonaux

Chen Thomas
t.chen.thomas1[at]gmail.com

17 mai 2024

Attention

1. Ce document contient certainement des coquilles. N'hésitez pas à me le signaler. De même si vous avez une question.
2. Pour les recasages, ce sont les miens mais ce développement se case peut-être ailleurs et je n'y ai pas réfléchi.
3. Il se peut que ce développement dure plus de 15 minutes. J'ai essayé de le découper pour faire des recollements personnalisés.

Leçons

- 213 : Espaces de Hilbert. Exemples d'applications.
- 234 : Fonctions et espaces de fonctions Lebesgue-intégrables.
- 250 : Transformation de Fourier. Applications.

Références

[1] V. Beck, J. Malick, G. Peyré. *Objectif Agreg.* H& K, 2005.

Tout est dans [1].
On note $g_n : x \mapsto x^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Définition 1. On dit $\rho : I \to \mathbb{R}$ est une fonction poids ρ est mesurable strictement positive et $\forall n \in \mathbb{N}, g_n\rho \in \mathrm{L}^1(I)$. On note

$$\mathrm{L}^p(I,\rho) = \left\{ f : I \to \mathbb{C} \text{ mesurable } : \int_I |f|^p \rho < +\infty \right\}$$

et on sait alors que $\mathrm{L}^2(I,\rho)$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \int_I f\overline{g}\rho.$$

Lemme 2. Si $g_n \in \mathrm{L}^1(I,\rho)$, alors $g_n \in \mathrm{L}^p(I,\rho)$ pour $p > 1$.

Démonstration. Remarquons que $\forall x \in I, |x|^{np} \leq 1 + |x|^{\lfloor np\rfloor+1}$ par disjonction de cas. Ainsi, comme $1 + |x|^{\lfloor np\rfloor+1} \in \mathrm{L}^1(I,\rho)$ car $g_n \in \mathrm{L}^{\lfloor np\rfloor+1}(I,\rho)$, on a le résultat. □

Théorème 3. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et ρ une fonction poids. On suppose que*

$$\exists a > 0, \int_I e^{a|x|}\rho(x)\mathrm{d}x < +\infty.$$

Alors les polynômes orthogonaux associés à ρ forment une base hilbertienne de $\mathrm{L}^2(I,\rho)$.

On décompose en deux étapes. Soit $f \in \mathrm{L}^2(I,\rho)$.

Etape 1 : on montre que $\varphi : x \in \mathbb{R} \mapsto f(x)\rho(x)\mathbb{1}_I(x) \in \mathbb{C}$ est L^1 sur $\mathbb{R}$ puis que $\widehat{\varphi}$ se prolonge en une fonction holomorphe F sur $B_a := \{z \in \mathbb{C} : |\Im(z)| < a/2\}$.

Etape 2 : on calcule $F^{(n)}(0)$ puis

$$\forall n \in \mathbb{N}, \langle f, g_n \rangle = 0 \Longrightarrow f = 0.$$

On concluera.

Démonstration. **Etape 1** Par Cauchy-Schwarz, on a

$$\left(\int_I f\rho\right)^2 \leq \int_I f^2\rho \int_I \rho < \infty$$

car $\rho > 0$. Ainsi, $\varphi \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ et on peut considérer sa transformée de Fourier $\widehat{\varphi}$. On veut montrer que $\widehat{\varphi}$ est prolongeable sur B_a en une fonction holomorphe. Pour cela, notons

$$F : z \in B_a \mapsto \int_I \underbrace{e^{-ixz} f(x)\rho(x)}_{=:g(x,z)} \mathrm{d}x$$

est holomorphe.

- Pour tout $z \in B_a$, $x \mapsto g(x,z)$ est mesurable sur I.
- Pour tout $x \in I$, $z \mapsto g(x,z)$ est holomorphe sur B_a.
- Domination :

  $$\forall z \in B_a, \forall x \in I, |g(x,z)| \leq e^{a|x|/2} f(x)\rho(x) \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$$

  par Cauchy-Schwarz. Par le théorème d'holomorphie sous le signe intégral, F est holomorphe et

  $$\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in B_a, F^{(n)}(z) = (-i)^n \int_I x^n e^{-izx} f(x)\rho(x)\mathrm{d}x.$$

F coïncide avec $\widehat{\varphi}$ sur $\mathbb{R}$ donc c'est bien un prolongement holomorphe de $\widehat{\varphi}$.
Etape 2 On a donc

$$F^{(n)}(0) = (-i)^n \int_I x^n f(z)\rho(x)\mathrm{d}x = (-i)^n \langle f, g_n \rangle = 0.$$

Ainsi, par analyticité de F, F est nulle au voisinage de 0. Par le théorème de prolongement analytique, B_a étant convexe, on a $F = 0$ sur B_a et en particulier sur $\mathbb{R}$. Ainsi, $\widehat{\varphi} = 0$ et par injectivité de la transformée de Fourier puisque $\varphi \in \mathrm{L}^1$, $\varphi = 0$ sur L^2. Puisque $\rho > 0$, $f = 0$ sur L^2. □

On a un contre-exemple. Si $I = \mathbb{R}^{+*}$ et $\rho : x \in I \mapsto x^{-\ln(x)}$, alors ρ est une fonction poids mais pour $f : x \mapsto \sin(2\pi \ln(x)), \forall n \in \mathbb{N}, \langle f, g_n \rangle = 0$.

Démonstration. On a

$$\int_0^{+\infty} |x|^n x^{-\ln(x)} \underset{y=\ln(x)}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ny} e^{-y^2} e^y \mathrm{d}y = \exp\left(\frac{(n+1)^2}{4}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\left(y - \frac{n+1}{2}\right)^2\right) \mathrm{d}y < +\infty.$$

Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\langle f, g_n \rangle &= \int_I x^n \sin(2\pi \ln(x)) x^{-\ln(x))} \mathrm{d}x \\
&\underset{y=\ln(x)}{=} \int_{\mathbb{R}} e^{ny} \sin(2\pi y) e^{-y^2} e^y \mathrm{d}y \\
&= \exp\left(\frac{(n+1)^2}{4}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(2\pi y) \exp\left(-\left(y - \frac{n+1}{2}\right)^2\right) \mathrm{d}y \\
&= \exp\left(\frac{(n+1)^2}{4}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\sin(2\pi t + \pi(n+1))}_{(-1)^{n+1}\sin(2\pi t)} e^{-t^2} \mathrm{d}t \\
&= 0
\end{aligned}$$

en tant qu'intégrale d'une fonction impaire intégrable. □