Intégrale de Dirichlet

Chen Thomas
t.chen.thomas1[at]gmail.com

17 mai 2024

Attention

1. Ce document contient certainement des coquilles. N'hésitez pas à me le signaler. De même si vous avez une question.
2. Pour les recasages, ce sont les miens mais ce développement se case peut-être ailleurs et je n'y ai pas réfléchi.
3. Il se peut que ce développement dure plus de 15 minutes. J'ai essayé de le découper pour faire des recollements personnalisés.

Leçons

- 235 : Problèmes d'interversion de symboles en analyse.
- 236 : Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables.
- 239 : Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

Références

[1] X. Gourdon. *Analyse.* Ellipses, 2020.

La dernière affirmation est faite maison. Le reste est dans [1].

Théorème 1. *Soit* $F : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t,x)\mathrm{d}t$ *avec* $f : (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto \operatorname{sinc}(t)e^{-xt}$*. Alors*

1. sinc *n'est pas intégrable.*
2. F *est bien définie*
3. F *admet une limite en* $+\infty$
4. F *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}^{+*}$
5. $F(0) = \dfrac{\pi}{2}$.

Démonstration.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\int_0^{n\pi} \left|\frac{\sin(t)}{t}\right| \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left|\frac{\sin(t)}{t}\right| \mathrm{d}t \geq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)\pi} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin(t)|\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2}{(k+1)\pi} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $f(x,\cdot)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$. Par ailleurs, au voisinage de $+\infty$, lorsque $x \neq 0$, on a $t^2\operatorname{sinc}(t)e^{-xt} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc par comparaison, $f(x,\cdot)$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ ce qui assure

l'existence de F sur $]0,+\infty[$. Il reste la convergence de $f(0,\cdot)$ en $+\infty$ pour conclure. Pour cela,

$$\int_1^A \operatorname{sinc}(t)\mathrm{d}t = \underbrace{\left[\frac{-\cos(t)}{t}\right]_1^A}_{\underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 0+\cos(1)} - \int_1^A \frac{\cos(t)}{t^2}\mathrm{d}t. \tag{1}$$

Or l'intégrale résiduelle converge absolument donc $\int_1^A \operatorname{sinc}(t)\mathrm{d}t$ admet une limite finie quand $A\to+\infty$.

3. sinc est bornée par 1 donc par inégalité triangulaire,

$$|F(x)| \leq \int_0^{+\infty} |\operatorname{sinc}(t)||e^{-xt}|\mathrm{d}t \leq \frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

4. On souhaite utiliser le théorème de Leibniz. Pour cela, on a
   (a) Soit $x\in\mathbb{R}^{+*}$. $t\mapsto f(t,x)$ est mesurable sur $\mathbb{R}^+$.
   (b) $\forall t\in\mathbb{R}^+, x\mapsto f(t,x)\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}$. $\forall t\in\mathbb{R}^+, \forall x\in\mathbb{R}^{+*}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t,x) = -t\operatorname{sinc}(t)e^{-xt}.$$

   (c) Domination :

$$\forall t\in\mathbb{R}^+, \forall a\in\mathbb{R}^{+*}, \forall x\in]a,+\infty[, \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \leq t\operatorname{sinc}(t)e^{-at}\in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^+).$$

   Par le théorème de dérivation sous le signe intégral, F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a,+\infty[$ pour tout $a>0$ donc sur $]0,+\infty[$ et

$$\forall x\in\mathbb{R}^{+*}, F'(x) = -\int_0^{+\infty}\sin(t)e^{-xt}\mathrm{d}t.$$

5. On a par la ligne précédente,

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R}^{+*}, F'(x) &= -\int_0^{+\infty}\sin(t)e^{-xt}\mathrm{d}t\\ &= -\Im\left(\int_0^{+\infty} e^{(i-x)t}\mathrm{d}t\right)\\ &= -\Im\left(\frac{-1}{i-x}\right)\\ &= \frac{-1}{1+x^2}.\end{aligned}$$

Ainsi, il existe C réel tel que $\forall x>0, F(x) = -\arctan(x)+C$. Puisque $F(x)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, l'égalité passe à la limite et $C=\frac{\pi}{2}$. Ainsi, la limite de $x\to 0$ de $F(x)$ existe, alors, $(\star)$ $\boxed{\lim_{x\to0^+} F(x) = \frac{\pi}{2}}$ et c'est ce qu'on voulait. Pour cela, on va utiliser le théorème de convergence dominée. Soit $G : x\in\mathbb{R}^+\mapsto \int_0^x \operatorname{sinc}$ la primitive de sinc s'annulant en 0. G est bornée en tant que fonction continue sur $\mathbb{R}^+$ ayant une limite finie en 0 et en $+\infty$. Alors pour tout $A>0$, pour tout $x\in\mathbb{R}^{+*}$,

$$\int_0^A \operatorname{sinc}(t)e^{-xt}\mathrm{d}t = \left[G(t)e^{-xt}\right]_0^A + \int_0^A xe^{-xt}G(t)\mathrm{d}t.$$

On fixe $x\in\mathbb{R}^{+*}$. G étant bornée, la convergence du crochet et de l'intégrale est du même acabit que l'équation 1 et on a finalement

$$\forall x>0, F(x) = 0 + \int_0^{+\infty} xe^{-xt}G(t)\mathrm{d}t.$$

L'application $u=xt$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^+$ dans lui-même. Le théorème de changement de variable nous assure alors

$$\forall x>0, F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-u}G\left(\frac{u}{x}\right)\mathrm{d}u.$$

(a) Soit $x > 0$. $u \mapsto e^{-u} G\left(\frac{u}{x}\right)$ est mesurable sur $\mathbb{R}^+$.

(b) Soit $u \in \mathbb{R}^+$. $e^{-u} G\left(\dfrac{u}{x}\right) \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} e^{-u} F(0)$.

(c) Domination : $\forall u \in \mathbb{R}^+, \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \left| e^{-u} G\left(\dfrac{u}{x}\right) \right| \leq e^{-u} \|G\|_\infty \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^+)$.

Par le théorème de convergence dominée, on a donc bien

$$F(x) \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} e^{-u} F(0) \mathrm{d}u = F(0).$$

Ainsi, dans $(\star)$, on a $F(0) = \dfrac{\pi}{2}$ ce qui signifie que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}.$$

$\square$