Equation de la chaleur périodique

Chen Thomas
t.chen.thomas1[at]gmail.com

17 mai 2024

Attention

1. Ce document contient certainement des coquilles. N'hésitez pas à me le signaler. De même si vous avez une question.
2. Pour les recasages, ce sont les miens mais ce développement se case peut-être ailleurs et je n'y ai pas réfléchi.
3. Il se peut que ce développement dure plus de 15 minutes. J'ai essayé de le découper pour faire des recollements personnalisés.

Leçons

- 235 : Problèmes d'interversion de symboles en analyse.
- 241 : Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.
- 246 : Séries de Fourier. Exemples et applications.

Références

[1] S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas. *Exercices de mathématiques. Oraux X-ENS, Analyse 4*. Cassini, 2012.

Théorème 1. *[1] Soit $u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, $\mathcal{C}^1$ par morceaux, 2π-périodique. Il existe alors une unique $u \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R})$ telle que*

$$\begin{cases} \partial_t u = \partial^2_{xx} u & \text{sur } \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R} \\ u(0, \cdot) = u_0 & \text{sur } \mathbb{R} \end{cases}.$$

Démonstration. Procédons par analyse-synthèse.

Analyse Soit u solution. A $t > 0$ fixé, $u(t, \cdot)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et 2π-périodique. u et ses dérivées sont donc somme de leurs séries de Fourier. On a

$$\forall x \in \mathbb{R}, u(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(t) e^{inx}$$

avec

$$c_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(t, x) e^{-inx} \mathrm{d}x.$$

On a donc aussi

$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widetilde{c_n}(t) e^{inx}$$

avec
$$\widetilde{c_n}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x)e^{-inx}\mathrm{d}x.$$
Par deux intégrations par parties, on a $\widetilde{c_n}(t) = -n^2 c_n(t)$ donc
$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = -n^2 \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(t)e^{inx}.$$
Par ailleurs,
$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widetilde{\widetilde{c_n}}(t)e^{inx}$$
avec
$$\widetilde{\widetilde{c_n}}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x)e^{-inx}\mathrm{d}x = c_n'(t).$$
En effet, en notant $\varphi : (t,x) \mapsto u(t,x)e^{-inx}$, on a

- $\forall x \in [0,2\pi], t \mapsto \varphi(t,x) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^{+*})$.
- Pour tout $t > 0$, $x \mapsto \dfrac{\partial \varphi}{\partial t}(t,x)$ est mesurable.
- Domination :
$$\forall a > 0, \forall t \geq a, \forall x \in [0,2\pi], \left|\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t,x)\right| \leq \left\|\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right\|_{\infty,[a,+\infty[\times[0,2\pi]} \in \mathrm{L}^1([0,2\pi]).$$

Par le théorème de Leibniz, c_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et
$$\forall t > 0, c_n'(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x)e^{-inx}\mathrm{d}x.$$
Ainsi,
$$\forall x \in \mathbb{R}, \partial_t u(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n'(t)e^{inx}.$$
Puisque u est solution, on a donc
$$\forall x \in \mathbb{R}, 0 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (c_n'(t) + n^2 c_n(t))e^{inx} = 0$$
et ce, pour tout $t > 0$. A t fixé, cette série, noté $S(x)$, converge normalement car la série de Fourier d'une fonction $\mathcal{C}^\infty$ converge normalement. Ainsi, par interversion série-intégrale, on a
$$0 = c_{n_0}(S) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} (c_n'(t)+n^2c_n(t))e^{inx}e^{-in_0x}\mathrm{d}x = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (c_n'(t)+n^2c_n(t)) \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(n-n_0)x}\mathrm{d}x}_{=\delta_{n,n_0}} = c_{n_0}'(t)+n_0^2c_{n_0}(t).$$
Cela étant vrai pour tout $n_0 \in \mathbb{Z}$, on a donc
$$\forall n_0 \in \mathbb{Z}, \forall t > 0, c_{n_0}(t) = C_{n_0}e^{-n^2t}$$
avec C_{n_0} une constante. Il reste à déterminer cette constante. Fixons $t > 0$. Par Parseval sur $x \mapsto u_0(x) - u(t,x)$, on a
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(0) - c_n(t)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |u(0,x) - u(t,x)|^2\mathrm{d}x.$$
Par le théorème de convergence dominée, l'intégrale tend vers 0 quand $t \to 0$ car elle est dominée. Par convergence normale, le théorème d'interversion limite intégrale nous dit donc que
$$\forall n_0 \in \mathbb{Z}, c_{n_0}(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} c_{n_0}(0)$$
ce qui signifie que $C_{n_0} = c_{n_0}(0)$. Ainsi,
$$\forall t \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}, u(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(0)e^{-n^2t}e^{inx}.$$

Synthèse Soit $t \geq 0, x \in \mathbb{R}$. On pose

$$u(t,x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(0) e^{-n^2 t} e^{inx}.$$

Avant toute chose, cette série converge normalement. En effet,

$$\forall t \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}, |c_n(0) e^{-n^2 t} e^{inx}| \leq |c_n(0)| \in \ell^1(\mathbb{Z})$$

car $u_0 \in \mathcal{C}^1_{pm}$ donc sa série de Fourier converge normalement. Par continuité du terme général, par le théorème de continuité des séries de fonctions, u est continue sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$. On souhaite montrer que c'est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$. Pour cela, considérons $a > 0$ et montrons que c'est $\mathcal{C}^\infty$ sur $[a, +\infty[\times \mathbb{R}$. Soit $p, q \in \mathbb{N}$. Alors

$$\left| \frac{\partial^{p+q} u}{\partial x^p \partial t^q}(t,x) \right| = |c_n(0)(in)^p(-n^2)^q e^{-n^2 t} e^{inx}| \leq |c_n(0)| n^{p+2q} e^{-n^2 a}$$

mais $|c_n(0)| \leq \int_0^{2\pi} |u_0| =: K$ et $K n^{p+2q} e^{-n^2 a} \in o(1/n^2)$ quand $n \to +\infty$. Par le théorème de dérivation des séries de fonctions, u est bien de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$.

Les calculs réalisés précédemment restent valident. En particulier, on a

$$0 = \partial_t u - \partial^2_{xx} u.$$

$\square$