Formule des compléments

Chen Thomas
t.chen.thomas1[at]gmail.com

17 mai 2024

Attention

1. Ce document contient certainement des coquilles. N'hésitez pas à me le signaler. De même si vous avez une question.
2. Pour les recasages, ce sont les miens mais ce développement se case peut-être ailleurs et je n'y ai pas réfléchi.
3. Il se peut que ce développement dure plus de 15 minutes. J'ai essayé de le découper pour faire des recollements personnalisés.

Leçons

- 236 : Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables.
- 245 : Fonctions holomorphes et méromorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}$. Exemples et applications.

Références

[1] E. Stein, R. Shakarchi. *Complex Analysis.* Princeton University Press, 2003.

C'est fait dans [1] mais je ne suis pas allé vérifié – je n'ai pas ce livre –. Cette méthode a l'avantage d'appliquer le théorème des résidus sur un contour simple.

***Proposition* 1.** Soit $s \in]0,1[$. Alors $\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \dfrac{\pi}{\sin(\pi s)}$.

Démonstration. Déjà, Γ est une fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ donc $\Gamma(s)\Gamma(1-s)$ existe pour tout $s \in]0,1[$. Fixons $s \in]0,1[$. On a

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1}e^{-t}\mathrm{d}t \int_0^{+\infty} x^{1-s-1}e^{-x}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} t^{s-1}e^{-t}x^{-s}e^{-x}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t$$

On réalise dans l'intégrale intérieure le changement de variable $x = ut$ qui est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}^{+*}$: on a

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} t^{s-1}e^{-t}u^{-s}t^{-s}e^{-ut}t\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} \underbrace{e^{-t(1+u)}u^{-s}}_{=:f_s(u,t)}\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t$$

Ainsi, $f_s(u,t)$ étant positive, par Fubini-Tonelli, on a donc

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} f_s(u,t)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} f_s(u,t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty}\frac{1}{u^s}\underbrace{\left(\int_0^{+\infty} e^{-t(1+u)}\mathrm{d}t\right)}_{=\frac{1}{1+u}}\mathrm{d}u$$

Finalement,

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+u)u^s}\mathrm{d}u.$$

On considère $a = 1-s$. Alors

$$\Gamma(1-a)\Gamma(a) = \Gamma(s)\Gamma(1-s) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{a-1}}{1+u}\mathrm{d}u.$$

On réalise le changement de variable $u(v) = e^v$ qui est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^{+*}$:

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{av}}{1+e^v}\mathrm{d}v.$$

Soit $f : z \in \mathbb{C} \mapsto \dfrac{e^{az}}{1+e^z}$. f est holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash\{i\pi + 2i\pi\mathbb{Z}\}$. On souhaite utiliser le théorème des résidus. Soit Γ, le contour suivant :

`contour.png`

Figure 1 – Contour rectangulaire

On note Γ le chemin ci-contre et $R > 0$. Alors par le théorème des résidus, étant donné que ce contour n'est autour que d'un seul pôle – $i\pi$ –,

$$\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z = 2i\pi \mathrm{Res}(f, i\pi).$$

On a

$$(z-i\pi)f(z) = e^{az}\frac{z-i\pi}{e^z - e^{i\pi}} \underset{z\to i\pi}{\longrightarrow} e^{ia\pi}e^{i\pi} = -e^{ia\pi} = \mathrm{Res}(f, i\pi).$$

On a donc $\displaystyle\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z = -2i\pi e^{ia\pi}$. En regardant le chemin Γ, on a

$$\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_{-R}^{R} f(x)\mathrm{d}x + \int_R^{R+2i\pi} f(z)\mathrm{d}z + \int_{R+2i\pi}^{-R+2i\pi} f(z)\mathrm{d}z + \int_{-R+2i\pi}^{-R} f(z)\mathrm{d}z.$$

On réalise les changements de variables suivants pour les intégrales $2, 3, 4$ respectivement : $z = R+it$ pour t allant de 0 à 2π, $z = x+2i\pi$ pour x allant de R à $-R$, $z = -R+it$ pour t allant de 2π à 0. On obtient alors

$$\left|\int_R^{R+2i\pi} f(z)\mathrm{d}z\right| = \left|\int_0^{2\pi} i\frac{e^{aR}e^{ait}}{1+e^Re^{it}}\mathrm{d}t\right| \leq \frac{e^{aR}}{e^R}\int_0^{2\pi}\frac{1}{\underbrace{|e^{-R}+e^{it}|}_{\geq 1-e^{-R}}} \leq e^{(a-1)R}\frac{2\pi}{1-e^{-R}} \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \ (a-1<0).$$

$$\int_{R+2i\pi}^{-R+2i\pi} f(z)\mathrm{d}z = \int_R^{-R}\frac{e^{ax}e^{2ia\pi}}{1+e^{ax}e^{2i\pi}}\mathrm{d}x = -e^{2ia\pi}\int_{-R}^{R} f(x)\mathrm{d}x.$$

$$\left|\int_{-R+2i\pi}^{-R} f(z)\mathrm{d}z\right| = \left|\int_{2\pi}^{0} i\frac{e^{-aR}e^{ait}}{1+e^{-R}e^{it}}\mathrm{d}t\right| \leq e^{-aR}\int_0^{2\pi}\frac{1}{\underbrace{|1+e^{-R}e^{it}|}_{\geq 1-e^{-R}}} \leq e^{-aR}\frac{2\pi}{1-e^{-R}} \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \ (a>0).$$

Ainsi, on a, puisque f est intégrable,

$$(1-e^{2ia\pi})\int_{-R}^{R} f(x)\mathrm{d}x \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} -2i\pi e^{ia\pi}$$

Ainsi,

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{-2i\pi e^{ia\pi}}{1-e^{2ia\pi}} = \pi\frac{2i}{e^{ia\pi}-e^{-ia\pi}} = \frac{\pi}{\sin(a\pi)}.$$

$\square$