# Indécomposabilité de la loi de Poisson

Chen Thomas
t.chen.thomas1[at]gmail.com

17 mai 2024

## Attention

1. Ce document contient certainement des coquilles. N'hésitez pas à me le signaler. De même si vous avez une question.
2. Pour les recasages, ce sont les miens mais ce développement se case peut-être ailleurs et je n'y ai pas réfléchi.
3. Il se peut que ce développement dure plus de 15 minutes. J'ai essayé de le découper pour faire des recollements personnalisés.

## Leçons

- 243 : Séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.
- 245 : Fonctions holomorphes et méromorphes sur un ouvert de C. Exemples et applications.
- 261 : Loi d'une variable aléatoire : caractérisations, exemples, applications.
- 264 : Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.
- 266 : Utilisation de la notion d'indépendance en probabilités.

## Références

[1] H. Queffelec, M. Queffelec. *Analyse complexe et applications.* Calvage & Mounet, 2017.

Tout est dans [1].

**Lemme 1.** (Hadamard)

Soit $f = u + iv$ avec $u, v$ réelles. On suppose que $f$ est entière, $\forall z \in \mathbb{C}, f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$. On note

$$A(r) = \sup_{|z|=r} \Re(f)(z).$$

Alors

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall r > 0, |a_n| \leq 2\dfrac{A(r) - u(0)}{r^n}$.
2. Si $d \in \mathbb{N}$ est tel que $A(r) = O_{r\to+\infty}(r^d)$, alors $f$ est polynômiale de degré au plus $d$.

*Démonstration.* 1. A $r > 0$ fixé, $\theta \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n e^{in\theta}$ converge normalement vers $f(re^{i\theta})$. Par interversion série-intégrale, on a donc, pour $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})e^{-in\theta}\mathrm{d}\theta = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k r^k \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(k-n)\theta}\mathrm{d}\theta = a^n r^n \tag{1}$$

et
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})e^{in\theta}\mathrm{d}\theta = 0. \tag{2}$$
En réalisant $(1)+\overline{(2)}$, on a
$$a_n r^n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})e^{-in\theta}\mathrm{d}\theta = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(u(re^{i\theta})-A(r))e^{-in\theta}\mathrm{d}\theta$$
puisque $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{-in\theta}\mathrm{d}\theta = 0$. Ainsi,
$$|a_n|r^n \leq \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}|u(re^{i\theta})-A(r)|\mathrm{d}\theta = 2(A(r)-u(0))$$
puisque $A(r) \geq u(re^{i\theta})$. On a utilisé (1) et pris la partie réelle :
$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})\mathrm{d}\theta$$
donne alors
$$u(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})\mathrm{d}\theta.$$

2. Ainsi, si $A(r) \leq Cr^d$ pour $r$ assez grand, alors
$$|a_n| \leq 2\frac{A(r)-u(0)}{r^n} \leq 2\frac{Cr^d-u(0)}{r^n} \underset{r\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$
lorsque $n > d$. Ainsi, $|a_n| = 0$ pour $n > d$ donc $f$ est de degré au plus $d$.

$\square$

**Théorème 2.**
*Soit $X, Y$ deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que $Z = X+Y$. Si $Z \sim \mathcal{P}(\lambda)$, alors $X, Y$ suivent une loi de Poisson.*

*Démonstration.* La stratégie consiste à regarder les séries génératrices. Soit $f(z) = G_X(z) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ ; $g(z) = G_Y(z) = \sum\limits_{n\geq 0} b_n z^n$ avec $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \mathbb{P}(X=n), b_n = \mathbb{P}(Y=n)$. Ainsi, le rayon de convergence de $f$ et $g$ est au moins 1.

Par hypothèse, $G_Z(z) = \sum_{n\geq 0} e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^n}{n!}z^n = e^{\lambda(z-1)}$ et ceci est vrai pour tout $z \in \mathbb{C}$. Par indépendance, on a
$$\forall |z| \leq 1, G_Z(z) = G_X(z)G_Y(z)$$
donc $\forall |z| \leq 1, e^{\lambda(z-1)} = f(z)g(z)$. Ainsi, par produit de Cauchy,
$$\forall |z| \leq 1, f(z)g(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n \sum_{n\geq 0} b_n z^n = \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{p+q=n} a_p b_q\right) z^n = \sum_{n\geq 0}\frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}z^n.$$
Par unicité des coefficients d'une série entière, on a
$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{p+q=n} a_p b_q = \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}.$$
En particulier, $a_n b_0 \leq \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}$ donc puisque $a_0 b_0 = 1$, $a_0$ et $b_0$ sont non nuls et
$$a_n \leq \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n! b_0}.$$

Ainsi, $f$ a un rayon infini et un raisonnement similaire donne que $g$ a un rayon infini. Par le principe de prolongement analytique, on a donc
$$\forall z \in \mathbb{C}, f(z)g(z) = e^{\lambda(z-1)}.$$
De plus, $f, g$ sont entières et sans zéros puisque leurs produits ne s'annulent jamais. Il existe alors $F, G$ entières [1] telles que
$$f = e^F \ ; \ g = e^G. \tag{3}$$

On veut donc montrer que $F$ et $G$ sont polynômiales de degré au moins 1. Pour ce faire, il suffit d'obtenir
$$\left|\sup_{|z|=r} \Re(F)(z)\right| \leq Cr$$
pour $r$ assez grand. Mais pour tout $|z| = r \geq 1$, on a
$$|f(z)\| = \left|\sum_{n\geq 0} a_n z^n\right| \leq \sum_{n\geq 0} |a_n| r^n = f(r)$$
car $a_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Puisque $b_0 \leq g(r)$, on a donc
$$b_0 f(r) \leq g(r) f(r) = e^{\lambda(r-1)}.$$
Ainsi, il existe une constante $C$ réelle telle que
$$|f(z)| \leq Ce^{\lambda(r-1)} \ ; \ |g(z)| \leq Ce^{\lambda(r-1)}$$
avec $r = |z|$. Ainsi, vu 3, on a
$$e^{\Re(F)(z)} \leq Ce^{\lambda(r-1)} \ ; \ e^{\Re(G)(z)} \leq Ce^{\lambda(r-1)}.$$
On passe au logarithme népérien. On a donc
$$\Re(F)(z) \leq\leq \ln(C) + \lambda(r-1) \ ; \ \Re(G)(z) \leq\leq \ln(C) + \lambda(r-1)$$
et ceci tient pour tout $|z| = r \geq 1$. Ainsi, $F, G$ vérifie le lemme. Il existe $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ tel que $\forall z \in \mathbb{C}, F(z) = \alpha z + \beta, G(z) = \gamma z + \delta$.

Puisque $f(1) = g(1) = 1$, on a donc $\alpha = -\beta, \gamma = -\delta$ donc
$$\forall z \in \mathbb{C}, f(z) = \exp(\alpha(z-1)), g(z) = \exp(\gamma(z-1)).$$
En remarquant que $\alpha = f'(1) = \mathbb{E}[X] \geq 0, \beta = \mathbb{E}[Y] \geq 0$, $X \sim \mathcal{P}(\alpha), Y \sim \mathcal{P}(\gamma)$ car les fonctions génératrices caractérisent la loi. $\square$

1. En effet, si $U$ est un ouvert étoilé et $f$ holomorphe sur $U$ ne s'y annulant pas, il existe $g$ holomorphe sur $U$ telle que $f = e^g$. Déjà, $e^- gf$ est constante si, et seulement si, $g' = f'/f$. $f$ étant holomorphe sur $U$, $f'$ et $f$ ne s'y annulant pas, $1/f$ aussi donc $f'/f$ est holomorphe. Elle admet donc une primitive que l'on note $g$. On a donc $g' = f'/f$ donc $e^- gf$ est constante, disons $\alpha$. exp étant surjective de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}^*$, on a donc $\beta$ tel que $e^\beta = \alpha$. La fonction $g + \beta$ convient.