# Loi forte des grands nombres

Chen Thomas
t.chen.thomas1[at]gmail.com

17 mai 2024

## Attention

1. Ce document contient certainement des coquilles. N'hésitez pas à me le signaler. De même si vous avez une question.
2. Pour les recasages, ce sont les miens mais ce développement se case peut-être ailleurs et je n'y ai pas réfléchi.
3. Il se peut que ce développement dure plus de 15 minutes. J'ai essayé de le découper pour faire des recollements personnalisés.

## Leçons

- 262 : Convergences d'une suite de variables aléatoires. Théorèmes limite. Exemples et applications.

## Références

[1] O. Garet, A. Kurtzmann. *De l'intégration aux probabilités.* Ellipses, 2011.

Tout est dans [1].

**Lemme 1.**
1. On suppose que $\sum \mathbb{P}(A_n)$ converge. Montrer que $\mathbb{P}(\limsup\limits_{n\to+\infty} A_n) = 0$.
2. On suppose les événements indépendants. Alors si la série diverge, $\mathbb{P}(\limsup\limits_{n\to+\infty} A_n) = 1$.

*Démonstration.*
1. On note $B_n := \bigcup\limits_{k=n}^{+\infty} A_k$. Il est aisé de montrer que $(B_n)_n$ est décroissante pour l'inclusion. Par continuité décroissante, on a donc
$$\mathbb{P}(\limsup_{n\to+\infty} A_n) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(B_n).$$
Or, par $\sigma$-sous-additivité,
$$\mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k\geq n} A_k\right) \leq \sum_{k\geq n} \mathbb{P}(A_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$
2. L'astuce est d'utiliser l'inégalité de convexité $e^x \geq 1 + x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Déjà,
$$\Omega \backslash B_n = \Omega \backslash \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k = \bigcap_{k=n}^{+\infty} \Omega \backslash A_k.$$

Fixons alors $N \geq n$. On a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\Omega \backslash B_n) &\leq \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{N} \Omega \backslash A_k\right) \\ &\underset{\perp\!\!\!\perp}{=} \prod_{k=n}^{N} (1 - \mathbb{P}(A_k)) \\ &\leq \prod_{k=n}^{N} \exp(-\mathbb{P}(A_k)) \\ &= \exp\left(-\sum_{k=n}^{N} \mathbb{P}(A_k)\right) \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(\Omega \backslash B_n) = 0$. Par $\sigma$-sous-additivité, on a donc

$$\mathbb{P}(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Omega \backslash B_n) = 0.$$

En passant au complémentaire, on a le résultat.

$\square$

**Lemme 2.** Si pour tout $\varepsilon > 0$, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(|Y_n - Y| > \varepsilon)$ converge, alors $Y_n \underset{n \to +\infty}{\overset{\text{p.s.}}{\longrightarrow}} Y$.

*Démonstration.* Soit $A_{n,k} := \{|Y_n - Y| > 2^{-k}\}$. Par le lemme de Borel-Cantelli,

$$\mathbb{P}(\limsup_{n \to +\infty} A_{n,k}) = 0$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$. Ainsi,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}\left(\bigcup_{N \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq N} |Y_n - Y| \leq 2^{-k}\right) = 1$$

donc

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k \in \mathbb{N}} \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq N} |Y_n - Y| \leq 2^{-k}\right) = 1$$

ce qui est équivalent à dire $Y_n \underset{n \to +\infty}{\overset{\text{p.s.}}{\longrightarrow}} Y$. $\square$

**Théorème 3.** *Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires de carré intégrable 2 à 2 non corrélées. On suppose que $\sup_{i \in \mathbb{N}} \mathrm{Var}(X_i) < +\infty$. Soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. Alors*

$$\frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{n} \underset{n \to +\infty}{\overset{\text{p.s.}}{\longrightarrow}} 0.$$

*Démonstration.* Notons $C := \sup_{i \in \mathbb{N}} \mathrm{Var}(X_i)$. Quitte à remplacer $X_i$ par $X_i - \mathbb{E}[X_i]$, on peut supposer les variables aléatoires centrées. Puisqu'elles sont deux à deux non corrélées, on a

$$\mathrm{Var}(S_n/n) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Var}(X_k) \leq \frac{C}{n}.$$

Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a

$$\varphi_n := \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{n}\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{C/n}{\varepsilon^2}.$$

Ainsi, $(\varphi_{n^2})_{n\in\mathbb{N}}$ est dans $\ell^1(\mathbb{N})$. Ainsi, par le lemme précédent,

$$\frac{S_{n^2}}{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} 0.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p(n) = \lfloor \sqrt{n} \rfloor^2$. Alors

$$0 \leq n - p(n) = \sqrt{n}^2 - \lfloor \sqrt{n} \rfloor^2 = (\sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor)(\sqrt{n} + \lfloor \sqrt{n} \rfloor) \leq 2\sqrt{n}.$$

Ainsi,

$$1 - \frac{p(n)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

donc

$$\frac{p(n)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

Notons $D_{n,p(n)} = \displaystyle\sum_{k=p(n)}^{n} X_k$. Alors

$$\mathrm{Var}\left(\frac{D_{n,p(n)}}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\mathrm{Var}(D_{n,p(n)}) \leq \frac{1}{n^2}C(n-p(n)) \in O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

Par précédent,

$$\frac{D_{n,p(n)}}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} 0.$$

Or,

$$\frac{S_n}{n} = \frac{D_{n,p(n)}}{n} + \frac{p(n)}{n}\frac{S_{p(n)}}{p(n)}$$

et

$$\left\{\frac{S_{p(n)}}{p(n)} : n \in \mathbb{N}^*\right\} = \left\{\frac{S_{n^2}}{n^2} : n \in \mathbb{N}^*\right\}$$

et $p(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc

$$\frac{S_{n^2}}{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} 0 \Longrightarrow \frac{S_{p(n)}}{p(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} 0.$$

Ainsi,

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} 0.$$

$\square$