Méthode de Laplace

Chen Thomas
t.chen.thomas1[at]gmail.com

17 mai 2024

Attention

1. Ce document contient certainement des coquilles. N'hésitez pas à me le signaler. De même si vous avez une question.
2. Pour les recasages, ce sont les miens mais ce développement se case peut-être ailleurs et je n'y ai pas réfléchi.
3. Il se peut que ce développement dure plus de 15 minutes. J'ai essayé de le découper pour faire des recollements personnalisés.

Leçons

- 224 : Exemples de développements asymptotiques de suites et de fonctions.

Références

[1] X. Gourdon. *Analyse*. Ellipses, 2020.

Tout est dans [1].

Lemme 1. Soit $\alpha > -1, \beta > 0, c > 0, b \in]0, +\infty]$. Alors

$$J(t) := \int_0^b x^\alpha e^{-txc^\beta} \mathrm{d}x \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\beta}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right) ct^{-\frac{\alpha+1}{\beta}}.$$

Démonstration. $J(t)$ existe pour tout $t > 0$ par comparaison. On réalise le changement de variable $u = tcx^\beta$ à t fixé. On a donc

$$J(t) = \int_0^{tcb^\beta} \left(\frac{u}{tc}\right)^{\frac{\alpha}{\beta}} e^{-u} \frac{1}{tc\beta\left(\frac{u}{tc}\right)^{\frac{\beta-1}{\beta}}} \mathrm{d}u = \underbrace{\frac{1}{\beta}\frac{1}{tc}(tc)^{1-\frac{1}{\beta}-\frac{\alpha}{\beta}}}_{=\frac{1}{\beta}(ct)^{-\frac{\alpha+1}{\beta}}} \underbrace{\int_0^{tcb^\beta} u^{\frac{\alpha+1}{\beta}-1} e^{-u} \mathrm{d}u}_{\underset{t\to+\infty}{\longrightarrow}\Gamma(\frac{\alpha+1}{\beta})}.$$

□

Théorème 2 (Méthode de Laplace)**.** *Soit g, h mesurables sur $\mathbb{R}^{+*}$ telles que*

1. $x \mapsto g(x)\exp(h(x)) \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^+)$.
2. $\exists \delta_0 > 0, \forall \delta \in]0, \delta_0[, \forall x \geq \delta, h(x) \leq h(\delta)$ *(hypothèse vérifiée par une fonction décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.*
3. $\exists \alpha > -1, c > 0, \beta > 0$ *tel que*

$$g(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} Ax^\alpha \;;\; h(x) = a - cx^\beta + o_{x\to 0^+}(x^\beta).$$

Alors
$$\int_0^{+\infty} g(x)\exp(th(x))\mathrm{d}x \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{A}{\beta}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right) e^{at}(ct)^{-\frac{\alpha+1}{\beta}}.$$

Démonstration. En multipliant par e^{-at}/A, on peut supposer que $a = 0, A = 1$. Soit donc
$$\varphi(t) := \frac{1}{\beta}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right)(ct)^{-\frac{\alpha+1}{\beta}}.$$

Soit $\varepsilon \in]0,1[$. On va montrer que

1. $\exists \delta \in]0, \delta_0[, \exists t_1 > 0$ tel que
$$\forall t \geq t_1, (1-\varepsilon)^2(1+\varepsilon)^{-\frac{\alpha+1}{\beta}}\varphi(t) \leq \int_0^{\delta} g(x)\exp(th(x))\mathrm{d}x \leq (1+\varepsilon)^2(1-\varepsilon)^{-\frac{\alpha+1}{\beta}}\varphi(t).$$
2. Pour de tels δ, t_1,
$$\int_{\delta}^{+\infty} |g(x)|\exp(th(x))\mathrm{d}x \in o_{t\to+\infty}(\varphi(t)).$$

1. Par définition de l'équivalent, j'ai un $\delta \in]0, \delta_0[$ tel que
$$\forall x \in]0, \delta[, \left| \begin{array}{l} (1-\varepsilon)x^{\alpha} \leq g(x) \leq (1+\varepsilon)x^{\alpha} \\ -c(1+\varepsilon)x^{\beta} \leq h(x) \leq -c(1-\varepsilon)x^{\beta} \leq 0. \end{array}\right.$$
Ainsi, par croissance de l'intégrale, on a
$$(1-\varepsilon)\int_0^{\delta} x^{\alpha}e^{-c(1+\varepsilon)tx^{\beta}}\mathrm{d}x \leq \int_0^{\delta} g(x)\exp(th(x))\mathrm{d}x \leq (1+\varepsilon)\int_0^{\delta} x^{\alpha}e^{-c(1-\varepsilon)tx^{\beta}}\mathrm{d}x.$$
Par le lemme préliminaire, on a
$$(1-\varepsilon)\int_0^{\delta} x^{\alpha}e^{-c(1+\varepsilon)tx^{\beta}}\mathrm{d}x \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1-\varepsilon}{\beta}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right)(ct)^{-\frac{\alpha+1}{\beta}}(1+\varepsilon)^{-\frac{\alpha+1}{\beta}} = (1-\varepsilon)(1+\varepsilon)^{-\frac{\alpha+1}{\beta}}\varphi(t).$$
De même pour l'autre intégrale, et donc, par définition de l'équivalent, il existe un temps t_1 tel que $\forall t \geq t_1$,
$$(1-\varepsilon)\int_0^{\delta} x^{\alpha}e^{-c(1+\varepsilon)tx^{\beta}}\mathrm{d}x \geq (1-\varepsilon)(1-\varepsilon)(1+\varepsilon)^{-\frac{\alpha+1}{\beta}}\varphi(t)$$
et
$$(1+\varepsilon)\int_0^{\delta} x^{\alpha}e^{-c(1-\varepsilon)tx^{\beta}}\mathrm{d}x \leq (1+\varepsilon)(1+\varepsilon)(1-\varepsilon)^{-\frac{\alpha+1}{\beta}}\varphi(t).$$
2. Soit $\mu := h(\delta) > 0$ car $h(\delta) < 0$. Par hypothèse, pour tout $x \geq \delta$, $h(x) \leq -\mu$. Ainsi,
$$\forall x \geq \delta, \forall t > 1, th(x) = (t-1)h(x) + h(x) \leq -(t-1)\mu + h(x).$$
Par croissance de l'intégrale,
$$\int_{\delta}^{+\infty} |g(x)|\exp(th(x))\mathrm{d}x \leq e^{-(t-1)\mu}\underbrace{\int_{\delta}^{+\infty} |g(x)|\exp(h(x))\mathrm{d}x}_{<+\infty} = o(\varphi(t))$$
par croissances comparées, μ étant strictement positif.

Ainsi, grâce aux faits 1 et 2 ainsi démontrés,
$$\int_0^{+\infty} g(x)\exp(th(x))\mathrm{d}x = \underbrace{\int_0^{\delta} g(x)\exp(th(x))\mathrm{d}x}_{\underset{t\to+\infty}{\sim}\varphi(t)} + \underbrace{\int_{\delta}^{+\infty} g(x)\exp(th(x))\mathrm{d}x}_{\in o_{t\to+\infty}(\varphi(t))} \underset{t\to+\infty}{\sim} \varphi(t).$$

□

Corollaire 3.
On suppose les mêmes hypothèses mais cette fois-ci sur $]0,b]$ avec $b \in \mathbb{R}^{+*}$. Alors on a

$$\int_0^b f(x)\exp(t\psi(x))\mathrm{d}x \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{A}{\beta}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right)e^{at}(ct)^{-\frac{\alpha+1}{\beta}}.$$

Démonstration. On prolonge g et h sur $\mathbb{R}^{+*}$ en posant $f(x)=0$ et $\psi(x)=a-1$ pour $x>b$. Puis on applique la méthode de Laplace. □

Corollaire 4. Soit f,ψ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]a,b[$ avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. On suppose que

1. $f\exp\circ\psi$ est intégrable sur $]a,b[$.
2. ψ atteint un maximum local en $c\in]a,b[$ non dégénéré (c'est-à-dire, ici, un point critique où la dérivée seconde ne s'annule pas). En ce point, on demande que f ne s'annule pas. On demande de plus que ψ' ne s'annule en aucun autre point.

Alors

$$\int_a^b f(x)\exp(t\psi(x))\mathrm{d}x \underset{t\to+\infty}{\sim} \Gamma(1/2)f(c)e^{t\psi(c)}\sqrt{\frac{2}{-t\psi''(c)}}.$$

Démonstration. On a

$$\int_a^b f(x)\exp(t\psi(x))\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\exp(t\psi(x))\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\exp(t\psi(x))\mathrm{d}x.$$

On réalise les changements de variables $u=c-x$ et $u=x-c$ pour obtenir

$$\int_a^b f(x)\exp(t\psi(x))\mathrm{d}x = \int_0^{c-a} f(c-x)\exp(t\psi(c-x))\mathrm{d}x + \int_0^{b-c} f(x+c)\exp(t\psi(x+c))\mathrm{d}x.$$

On souhaite maintenant appliquer le premier corollaire. Pour cela, vérifions les hypothèses.

1. L'intégrabilité est automatique par hypothèse et ce, dans les deux cas.
2. On vérifie trivialement le point 2. ψ ne peut changer de signe qu'au niveau de c et change effectivement de signe puisque $\psi''(c)\neq 0$. Ainsi, puisque c'est un maximum, ψ est croissante sur $]a,c]$ puis décroissante sur $[c,b[$. Ainsi, $x\mapsto\psi(c-x)$ est décroissante sur $[0,c-a]$ et $x\mapsto\psi(x+c)$ est décroissante sur $[0,b-c]$.
3. Pour ψ, on traduit l'hypothèse 2 de notre corollaire comme suit : ψ étant de classe $\mathcal{C}^2$, par Taylor-Young, on a $\psi(c-x)=\psi(c)-x\psi'(c)+x^2\psi''(c)/2+o_{x\to0}(x^2)=\psi(c)-x^2|\psi''(c)|/2+o_{x\to0}(x^2)$ et $\psi(c+x)$ a le même développement limité. Pour f, on a $f(c-x)=f(c)(-x)^0+o_{x\to0}(1)$ et $f(c+x)$ a le même développement limité.

On a donc les hypothèse du corollaire avec $A=f(c),\alpha=0,a=\psi(c),c=|\varphi''(c)|/2,\beta=2$ donc on a deux fois le même équivalent. On peut donc les sommer et obtenir le résultat souhaité. □

Application : Formule de Stirling. On rappelle que

$$\Gamma(x+1)=\int_0^{+\infty} t^x e^{-t}\mathrm{d}t = x!$$

(factorielle d'un réel, généralisation pour un entier). On souhaite obtenir un équivalent quand $x\to+\infty$. Pour cela,

$$\Gamma(x+1)=x^{x+1}\int_0^{+\infty} e^{x(\ln(u)-u)}\mathrm{d}u.$$

On est dans le cadre d'application de la méthode de Laplace avec $f=1$ et $\psi(x)=\ln(x)-x$. ψ admet un point critique non dégénéré en 1 et atteint un maximum en 1. D'ailleurs, ψ' ne s'annule nulle par ailleurs et $f(1)=1(1)=1$. Enfin, on manipule effectivement une fonction intégrable. Par la méthode de Laplace,

$$\int_0^{+\infty} e^{x(\ln(u)-u)}\mathrm{d}u \underset{x\to+\infty}{\sim} \Gamma(1/2)e^{-x}\sqrt{2/x}.$$

Ainsi,

$$\Gamma(x+1) \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi}x^{x+1/2}e^{-x}.$$