Polynôme de meilleure approximation

Chen Thomas
t.chen.thomas1[at]gmail.com

17 mai 2024

Attention

1. Ce document contient certainement des coquilles. N'hésitez pas à me le signaler. De même si vous avez une question.
2. Pour les recasages, ce sont les miens mais ce développement se case peut-être ailleurs et je n'y ai pas réfléchi.
3. Il se peut que ce développement dure plus de 15 minutes. J'ai essayé de le découper pour faire des recollements personnalisés.

Leçons

- 206 : Exemples d'utilisation de la dimension finie en analyse.

Références

[1] J.-P. Demailly. *Analyse numérique et équations différentielles.* EDP Sciences, 2016.

Tout est dans [1].

On mets les éléments suivants dans le plan.

Soit $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. On munit $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ de la norme $\|\cdot\| = \sup\limits_{[a,b]} |\cdot|$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{R}_n$ l'ensemble des fonctions polynômiales réelles de degré au plus n.

Théorème 1. *Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Il existe alors $Q \in \mathcal{R}_n$ tel que $d(f, \mathcal{R}_n) = \|f - Q\|$.*

On l'appelle polynôme de meilleure approximation de f. Si f est polynômiale, il n'y a rien à faire. On suppose donc dans toute la suite que f n'est pas polynômiale.

Définition 2. On dit qu'une fonction $g \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ équioscille sur $(k+1)$ points de $[a,b]$ lorsqu'il existe des points $x_0 < \cdots < x_k$ dans $[a,b]$ tels que

$$\forall i \in [\![0,k]\!], |g(x_i)| = \|g\| \text{ et } \forall i \in [\![0,k-1]\!], g(x_{i+1}) = -g(x_i).$$

Remarquons que si une fonction équioscille sur $(N+1)$ points, elle équioscille sur $(n+1)$ points avec $n < N$.

Lemme 3 (Technique)**.** Soit $P \in \mathcal{R}_n$ tel que $d(f, \mathbb{R}_n[X]) = \|f - P\|$. Alors $g := f - P$ équioscille sur $(n+2)$ points de $[a,b]$.

Lemme 4. Soit $P, Q \in \mathcal{R}_n$ tels que $d(f, \mathbb{R}_n[X]) = \|f - P\| = \|f - Q\|$. Soit $x_0, \cdots, x_{n+1}$, les points d'équioscillation du lemme précédent avec $g := f - P$. Alors il existe $i \in [\![0, n+1]\!]$ tel que

$$(-1)^i(f(x_i) - Q(x_i)) > (-1)^i(f(x_i) - P(x_i)).$$

Théorème 5. *Le polynôme de meilleure approximation est unique.*

Preuve du théorème 1. Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $0 \in \mathcal{R}_n$, $d(f,\mathcal{R}_n) \leq \|f\|$. Ainsi, en notant

$$K = \{P \in \mathcal{R}_n : \|f-P\| \leq \|f\|\},$$

K est une partie fermée bornée de $\mathcal{R}_n$ de dimension finie. K est donc compact et par continuité de $d(f,\cdot)$, il existe $Q \in \mathcal{R}_n$ tel que $d(f,K) = \|f-Q\|$. Puisque $d(f,K) = d(f,\mathcal{R}_n)$, on a donc le résultat souhaité. $\square$

Preuve du lemme 3. Supposons par l'absurde le contraire. Remarquons que $g \neq 0$ et est continue. De fait, $\|g\| \neq 0$. Soit

$$x_0 = \{x \in [a,b] : |g(x)| = \|g\|\}.$$

On définit alors par récurrence

$$x_k = \inf\{x \in [x_{k-1},b] : g(x) = -g(x_{k-1}\}.$$

On suppose que cette construction de cette suite existe jusqu'à un rang $k \leq n$ – autrement dit, on suppose que l'on ne peut créer que $k+1$ points donc un maximum de $n+1$ points –. Fixons alors $i \in [\![1,k]\!]$. Sur chaque intervalle $[x_{i-1},x_i]$, g s'annule par le théorème des valeurs intermédiaires. On met en exergue le plus grand point d'annulation :

$$c_i = \sup\{x \in [x_i,x_{i+1}] : g(x) = 0\}.$$

Ce supremum existe car c'est le supremum d'une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$, fermée de surcroît assurant que $x_i \leq c_i \leq x_{i+1}$ et les inégalités sont strictes.

On a donc

$$a \leq x_0 < c_1 < x_1 < c_2 < x_2 < \cdots < x_{k-1} < c_k < x_k \leq b.$$

Sans perte de généralités, posons $g(x_0) > 0$. Alors $\underline{g(x_i) = (-1)^i\|g\| \text{ pour } i \in [\![0,k]\!]}$ ce qui donne $\underline{(-1)^i g(x_i) \geq 0}$ dans tous les cas. Notons $\pi(x) = \prod_{i=1}^{n}(c_i - x) \in \mathcal{R}_n$. Le signe de π sur $[c_i,c_{i+1}]$ est donc $(-1)^i$ pour $i \in [\![1,k-1]\!]$. Sur $[a,c_0]$, c'est positif, et sur $[c_k,b]$, c'est le signe de $(-1)^k$.

Notons $g_\varepsilon := g - \varepsilon\pi = f - (p + \varepsilon\pi)$ pour $\varepsilon > 0$.

Objectif : montrer que $\|g_\varepsilon\| < \|g\|$ si $\varepsilon \ll 1$. Soit $i \in [\![1,k]\!]$.

1. Sur $[a,x_0]$, on a $-\|g\| < g \leq \|g\|$ par construction de x_0.
2. Sur $[x_{i-1},c_i]$, on a $-\|g\| \leq (-1)^i g < \|g\|$. [1]
3. Sur $[c_i,x_i]$, on a $0 \leq (-1)^i g \leq \|g\|$. [2]
4. Sur $[x_k,b]$, on a $-\|g\| < (-1)^k g \leq \|g\|$. [3]

On peut donc trouver $A > 0$ tel que $A < \|g\|$ et

1. Sur $[a,x_0]$, $g > -A$.
2. Sur $[x_{i-1},c_i]$, $(-1)^i g < A$
3. Sur $[c_i,x_i]$, rien en particulier.

1. Si $g(x_{i-1}) > 0$, alors $i-1$ est pair et i est impair. Ainsi, on veut obtenir $-\|g\| \leq -g < \|g\|$ ce qui est équivalent à demander $-\|g\| < g \leq \|g\|$. La deuxième inégalité peut-être une égalité – vrai en x_{i-1} mais ce n'est pas important –. La première inégalité est stricte : sinon, j'ai $x \in [x_{i-1},c_i]$ tel que $g(x) = -\|g\|$ donc on pouvait définir x_i dans x_{i-1}, c_i ce qui est absurde. Si $g(x_{i-1}) < 0$, c'est analogue.
2. Si j'ai $\alpha \in]c_i,x_i[$ tel que $(-1)^i g(\alpha) < 0$, comme $(-1)^i g(x_i) \geq 0$, par le TVI, $(-1)^i g$ s'annule sur $]c_i,x_i[$ ce qui est exclu par maximalité de c_i.
3. Si j'ai $x \in [x_k,b]$ tel que $(-1)^k g(x) = -\|g\|$, alors comme $(-1)^k g(x_k) > 0$, on peut construire $x_{k+1} := x$ et c'est exclu par maximalité de k.

4. Sur $[x_k, b]$, on a $(-1)^k g > -A$.

Notons $M = \|\pi\|$. Comme le signe de π est $(-1)^i$ sur $[c_i, c_{i+1}]$.

1. Sur $[a, x_0]$, on a
$$\begin{array}{ccccc} -A & < & g & \leq & \|g\| \\ -\varepsilon M & \leq & -\varepsilon\pi & \underset{x_0<c_0}{\leq} & 0 \end{array}.$$
En sommant, on a
$$\boxed{-A - \varepsilon M < g_\varepsilon \leq \|g\|}.$$
2. Sur $[x_{i-1}, c_i]$, on a
$$\begin{array}{ccccc} -\|g\| & \leq & g & < & A \\ 0 & \leq & -\varepsilon(-1)^i\pi & \leq & \varepsilon M \end{array}.$$
En effet, le signe de $(-1)^i\pi$ est -1 sur $[x_{i-1}, c_i] \subset [c_{i-1}, c_i]$ donc $-(-1)^i\pi \geq 0$ et $-(-1)^i\pi \leq M$. En sommant, on a
$$\boxed{-\|g\| \leq (-1)^i g_\varepsilon < A + \varepsilon M}.$$
3. Sur $[c_i, x_i]$, on a
$$\begin{array}{ccccc} 0 & \leq & (-1)^i g & \leq & \|g\| \\ -\varepsilon M & \leq & -\varepsilon\pi & \underset{x_0<c_0}{\leq} & 0 \end{array}.$$
En sommant, on a donc $-\varepsilon M \leq (-1)^i g_\varepsilon \leq \|g\|$.
4. Sur $[x_k, b]$, on a
$$\begin{array}{ccccc} -A & < & (-1)^k g & \leq & \|g\| \\ -\varepsilon M & \leq & -\varepsilon(-1)^k\pi & \leq & 0 \end{array}.$$
En sommant, on a
$$\boxed{-A - \varepsilon M < g_\varepsilon \leq \|g\|}.$$

Puisque $A < \|g\|$, on peut prendre ε suffisamment petit pour que $A + \varepsilon M \leq \|G\|$, par exemple, $\varepsilon = \dfrac{1}{2M}(\|g\| - A)$.

Par ailleurs, on n'a jamais $g_\varepsilon(x) = \|g\|$ pour $x \in [x_{i-1}, x_i]$ pour tout $i \in [\![1, k]\!]$. Si c'était le cas, on doit réaliser $0 = \pi(x)$ et $\|g\| = |g(x)|$ donc $x = c_i$ mais $g(c_i) = 0$. Ainsi, les inégalités $g_\varepsilon < \|g\|$ sont effectivement strictes.

Bilan : dans tous les cas, on a donc $-\|g\| < |g_\varepsilon| < \|g\|$ donc $\|g_\varepsilon\| < \|g\|$. Cela est absurde car $p + \varepsilon\pi \in \mathcal{R}_n$. Ainsi, $k \geq n + 1$ et on a au moins $n + 2$ points d'équioscillation. □

Preuve du lemme 4. Supposons par l'absurde le contraire. Alors
$$\forall i \in [\![0, n+1]\!], (-1)^i(f(x_i) - Q(x_i) - f(x_i) + P(x_i)) \leq 0$$
donc par le TVI, il existe $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ tel que $P(\xi_i) = Q(\xi_i))$ pour tout $i \in [\![0, n]\!]$.

- Si les ξ_i sont deux à deux distincts, P et Q sont égales en $n+1$ points distincts et sont polynômiales de degré n. On a donc $P = Q$ et c'est absurde.
- Dans le cas contraire, puisque chaque $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$, on peut avoir $\xi_i = \xi_j$ seulement si i et j sont d'écart 1 et dans ce cas, il existe $j \in [\![1, n-1]\!]$ tel que $\xi_j = \xi_{j+1} = x_j$. Ainsi, sur l'intervalle $[x_{j-1}, x_{j+1}]$, $P - Q$ ne s'annule qu'en x_j. Or, $(-1)^j(P - Q)$ est positive en x_{j+1} et en x_{j-1} : ainsi, x_i est racine de multiplicité paire dans $(P - Q)$ donc au moins 2.

  Ainsi, $P - Q$ a au moins $n + 1$ racines comptées avec multiplicités ce qui donne $P = Q$ et c'est absurde.

□

Preuve du théorème 5. Si on est dans les hypothèses du lemme 4, alors $\|f - Q\| > \|f - P\|$. C'est absurde donc $p = q$. □.