Théorème de Stone-Weierstrass

Chen Thomas
t.chen.thomas1[at]gmail.com

17 mai 2024

Attention

1. Ce document contient certainement des coquilles. N'hésitez pas à me le signaler. De même si vous avez une question.
2. Pour les recasages, ce sont les miens mais ce développement se case peut-être ailleurs et je n'y ai pas réfléchi.
3. Il se peut que ce développement dure plus de 15 minutes. J'ai essayé de le découper pour faire des recollements personnalisés.

Leçons

- 201 : Espaces de fonctions. Exemples et applications.
- 203 : Utilisation de la notion de compacité.
- 209 : Approximation d'une fonction par des fonctions régulières. Exemples d'applications.

Références

[1] F. Hirsch, G. Lacombe. *Eléments d'analyse fonctionnelle.* Dunod, 2009.

Tout est dans [1].

Théorème 1 (Stone-Weierstrass)**.**
Soit H sous-algèbre de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ avec (X, d) métrique compact. On suppose H séparante et unitaire. Alors H est dense dans $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$.

Lemme 2. Il existe une suite de fonctions polynômiales tendant uniformément vers $|\cdot|$ sur $[-1, 1]$.

Démonstration. Soit $P_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [-1, 1], P_{n+1}(x) = P_n(x) + \dfrac{1}{2}(x^2 - P_n^2(x))$. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [-1, 1], 0 \leq P_n(x) \leq P_{n+1}(x) \leq |x|.$$

En effet, faisons-le par récurrence, le cas $n = 0$ étant immédiat. Supposons le résultat acquis pour $n \in \mathbb{N}$. On a $\forall x \in [-1, 1], P_{n+2}(x) = P_{n+1}(x) + \dfrac{1}{2}(x^2 - P_{n+1}^2(x))$. Puisque $\forall x \in [-1, 1], 0 \leq P_{n+1}^2(x) \leq x^2$, on a $P_{n+2} \geq P_{n+1}$ et $P_{n+2}^2 \leq x^2$ car $P_{n+1}^2 \leq x^2$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(P_n(x))$ est croissante bornée donc convergente, disons vers $f(x)$. Mais alors, par passage à la limite, on a $\forall x \in [-1, 1], 0 \leq f(x) \leq |x|$ mais $f(x) = f(x) + \dfrac{1}{2}(x^2 - f^2(x))$ donc $f^2(x) = x^2$. Ainsi, $f = |\cdot|$. Pour obtenir la convergence uniforme, on utilise le théorème de Dini pour conclure.

$\square$

Lemme 3.
Dans les notations du théorème de Stone-Weierstrass, $\overline{H}$ est réticulée et pour tout couple $(x_1, \alpha_1), (x_2, \alpha_2)$ avec $x_1 \neq x_2$, il existe $u \in H, u(x_1) = \alpha_1, u(x_2) = \alpha_2$.

Démonstration. Par le lemme précédent, pour $f \in H$, on a $P_n\left(\dfrac{f}{\|f\|}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{unif.}} \dfrac{|f|}{\|f\|}$ donc $\|f\| P_n\left(\dfrac{f}{\|f\|}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{unif.}} |f|$. On a donc $|f|$ qui est limite uniforme d'éléments de $\overline{H}$ donc $|f| \in \overline{H}$. Ainsi, $\sup(f,g), \inf(f,g) \in \overline{H}$ pour toute fonctions f, g dans H.

Pour le deuxième point, puisque h est séparante, soit h tel que $h(x_1) \neq h(x_2)$. Soit α_1, α_2 deux réels. Le système

$$\begin{cases} \lambda h(x_1) + \mu = \alpha_1 \\ \lambda h(x_2) + \mu = \alpha_2 \end{cases}$$

est inversible. Il existe donc une solution (λ, μ). Considérons alors $\lambda h + \mu \mathrm{Id} \in H$ (car H est un espace vectoriel contenant les constantes). Cette fonction convient. $\square$

Passons à la preuve de Stone-Weierstrass.

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$.

Objectif 1 : trouver un candidat point par point Soit $x \in X$ et $y \neq x$. Par le lemme, il existe $u_y \in \overline{H}$ tel que $u_y(x) = f(x), u_y(x) = f(y)$.

Posons $O_y = \{x' \in X : u_y(x') > f(x') - \varepsilon\}$. Pour tout $y \in X$, O_y est ouvert qui contient y et x par continuité de u_y et f. Par construction,

$$X = \bigcup_{y \neq x} O_y$$

donc par compacité de X, il existe $y_1, \cdots, y_N$ tous différents de x tel que $X = \bigcup_{i=1}^{n} O_{y_i}$. Soit donc $v_x = \sup(u_{y_1}, \cdots, u_{y_N}) \in H$ car $\overline{H}$ est réticulée plus une récurrence. De plus,

$$v_x(x) = \sup(u_{y_1}(x), \cdots, u_{y_N}(x)) = \sup(f(x), \cdots, f(x)) = f(x)$$

et $\forall x' \in X, v_x(x') > f(x') - \varepsilon$. Ainsi, en chaque point x de X, on trouve une fonction v_x vérifie $v_x > f - \varepsilon$.

Objectif 2 : conclure Pour chaque $x \in X$, on note $\Omega_x = \{x' \in X : v_x(x') < f(x') + \varepsilon\}$. Alors Ω_x est ouverte car v_x et f sont continues. Par construction,

$$\bigcup_{x \in X} \Omega_x = X.$$

Par compacité, il existe $x_1, \cdots, x_n$ tel que $X = \bigcup_{i=1}^{n} \Omega_{x_i}$. Notons alors $v = \inf(v_{x_1}, \cdots, v_{x_n}) \in \overline{H}$. Alors $f(x) \leq f(x) + \varepsilon$. Ainsi,

$$\forall x \in X, f(x) - \varepsilon \leq v(x) \leq f(x) + \varepsilon.$$

Ainsi, H est dense dans $\mathcal{C}(X)$.

$\square$