Théorème de la limite simple de Baire

Chen Thomas
t.chen.thomas1[at]gmail.com

17 mai 2024

Attention

1. Ce document contient certainement des coquilles. N'hésitez pas à me le signaler. De même si vous avez une question.
2. Pour les recasages, ce sont les miens mais ce développement se case peut-être ailleurs et je n'y ai pas réfléchi.
3. Il se peut que ce développement dure plus de 15 minutes. J'ai essayé de le découper pour faire des recollements personnalisés.

Leçons

- 205 : Espaces complets. Exemples et applications.
- 228 : Continuité, dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.

Références

[1] X. Gourdon. *Analyse*. Ellipses, 2020.

Tout est dans [1].

On rappelle que pour toute partie A d'un espace topologique E, $\mathring{A} = E \backslash (\overline{E \backslash A})$.

Théorème 1. *Soit (E, d) un espace métrique complet. Soit $(\Omega_i)_{i \in \mathbb{N}}$ des ouverts denses de E. Alors $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} \Omega_i$ est dense dans E.*

Démonstration. Soit V un ouvert non vide de E. On souhaite montrer que $V \cap \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \Omega_i \neq \emptyset$. On construit alors $(B_i)_{i \in \mathbb{N}}$ des boules fermées de E vérifiant

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, B_n est fermée de rayon $R \in \left[0, \frac{1}{2^n}\right]$.
2. $B_0 \subset (\Omega_0 \cap V)$ et
$$\forall n \in \mathbb{N}, B_{n+1} \subset \left(\Omega_{n+1} \cap \mathring{B}_n\right).$$

On aura ainsi construit une suite de boules fermées décroissantes pour l'inclusion qui se trouve dans tous les ouverts Ω_i.

Ces boules existent. En effet, puisque $\Omega_0 \cap V$ est ouverte et Ω_0 dense dans E, l'intersection est un ouvert non vide : il existe donc une boule fermée de rayon fixé que l'on peut prendre inférieure à 1 dans Ω_0. Supposons ainsi construit $B_0, \cdots, B_n$. Alors $\Omega_{n+1} \cap \mathring{B}_n$ est ouverte et, par densité de Ω_{n+1}, est non vide. Ainsi, on peut effectivement construire B_{n+1}.

On a donc une suite décroissante de fermés dans $V \cap \bigcap_{i\in\mathbb{N}} \Omega_i$. Par complétude, le théorème des fermés emboités s'applique : il existe $x_0 \in \bigcap_{i\in\mathbb{N}} B_i$ et alors $x_0 \in V \cap \bigcap_{i\in\mathbb{N}} \Omega_i$. □

***Corollaire* 2.**
Soit (E,d) un espace métrique complet. Soit $(F_i)_{i\in\mathbb{N}}$ des fermés d'intérieurs vide de E. Alors $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} F_i$ est d'intérieur vide dans E.

Démonstration. On utilise le fait que $E\backslash \mathring{F} = \overline{E\backslash F}$. On considère alors $\Omega_i = E\backslash F_i$. Alors les Ω_i sont des ouverts denses et par le théorème de Baire, on a

$$E\backslash\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} F_i\right)$$

qui est dense dans E donc $\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} F_i\right)$ est d'intérieur vide. □

***Corollaire* 3.**
Soit F_n une suite de fermés tel que $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathring{F}_n$ est dense dans E.

Démonstration. Soit $G = E\backslash\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathring{F}_n\right)$. Alors pour tout $n\in\mathbb{N}, G\cap F_n$ est d'intérieur vide puisque

$$\overbrace{G\cap F_n}^{\circ} \subset G\cap \mathring{F}_n = \emptyset.$$

Par le théorème de Baire, puisque $G\cap F_n$ est fermé,

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (G\cap F_n)$$

est d'intérieur vide ce qui signifie que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (G\cap F_n) = G\cap \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n = G\cap E = G$ est d'intérieur vide. En prenant le complémentaire, on a le résultat voulu. □

Théorème 4. *Soit (E,d) un espace métrique complet, (F,δ) un espace métrique. Soit $(f_n)_n \in (\mathcal{C}^0(E,F))^{\mathbb{N}}$ telle que $(f_n)_n$ converge simplement, disons vers f. Alors l'ensemble des points de continuité contient une intersection dénombrable d'ouverts denses.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $n\in\mathbb{N}$. On note

$$F_{n,\varepsilon} = \{x\in E : \forall p\geq n, \delta(f_n(x), f_p(x)) \leq \varepsilon\}.$$

Par continuité de f_n, f_p, δ, l'ensemble

$$G_p := \{x\in E : \delta(f_n(x), f_p(x)) \leq \varepsilon\}$$

est un fermé et

$$F_{n,\varepsilon} = \bigcap_{p\geq n} G_p.$$

On veut appliquer le corollaire précédent. On veut donc montrer que $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_{n,\varepsilon}$. Soit $x\in E$. Alors $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$ donc la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente donc de Cauchy. En notant

$$\Omega_\varepsilon = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathring{F}_{n,\varepsilon},$$

on a Ω_ε qui est un ouvert dense dans E. Soit donc $x_0 \in \Omega_\varepsilon$. Il existe donc $n \in \mathbb{N}$ tel que $x_0 \in \overset{\circ}{F}_{n,\varepsilon}$. Par continuité de f_n, il existe un voisinage $V \in \mathcal{V}(x_0) \cap \overset{\circ}{F}_{n,\varepsilon}, \forall x \in V, \delta(f_n(x_0), f_n(x)) \leq \varepsilon$.

Puisque $V \subset \overset{\circ}{F}_{n,\varepsilon}, \forall x \in V, \forall p \geq n, \delta(f_n(x), f_p(x)) \leq \varepsilon$. En faisant tendre p vers $+\infty$, on a donc

$$\delta(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon.$$

Ainsi,
$$\forall x \in V, \delta(f(x_0), f(x)) \leq \delta(f(x), f_n(x)) + \delta(f_n(x), f_n(x_0)) + \delta(f_n(x_0), f(x_0)) \leq 3\varepsilon.$$
Ainsi, on va pouvoir montrer que f est continue sur $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}^*} \Omega_{1/n}$.

Soit $R = \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}^*} \Omega_{1/n}$. Soit $x_0 \in R$ et $\varepsilon > 0$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{n} \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Alors $x_0 \in \Omega_{1/n}$ donc

$$\exists V \in \mathcal{V}(x_0), \forall x \in V, \delta(f(x), f(x_0)) \leq \frac{3}{n} \leq \varepsilon.$$

Ainsi f est continue sur R qui est une intersection d'ouverts dense dans E. □

***Corollaire* 5.**
Si f est dérivable sur $\mathbb{R}$, f' est continue sur un dense de $\mathbb{R}$.

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{n}\left(f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)\right)$. Alors $f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\text{C.S.}} f'$ donc f' est continue sur une intersection dénombrable d'ouverts denses de $\mathbb{R}$ qui est complet. Par le théorème de Baire, f' est continue sur un dense de $\mathbb{R}$. □