Théorème de Paul Lévy et théorème central limite

Chen Thomas
t.chen.thomas1[at]gmail.com

20 mai 2024

Attention

1. Ce document contient certainement des coquilles. N'hésitez pas à me le signaler. De même si vous avez une question.
2. Pour les recasages, ce sont les miens mais ce développement se case peut-être ailleurs et je n'y ai pas réfléchi.
3. Il se peut que ce développement dure plus de 15 minutes. J'ai essayé de le découper pour faire des recollements personnalisés.

Leçons

- 261 : Loi d'une variable aléatoire : caractérisations, exemples, applications.
- 262 : Convergences d'une suite de variables aléatoires. Théorèmes limite. Exemples et applications.

Références

[1] H. Queffelec, C. Zuily. *Analyse pour l'agrégation - Agrégation/Master Mathématiques.* Dunod, 2020.

Tout est dans [1]. Je définis la convergence en loi avec les espérances et les fonctions continues bornées. De plus, pour Paul Lévy, passer par la classe de Schwartz est plus simple qu'un Stone Weierstrass un peu sombre.

Lemme 1. Il suffit de tester la convergence en loi sur les fonctions de $\mathcal{C}_0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ au lieu de $\mathcal{C}_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Démonstration. Déjà, si $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} X$, l'inclusion $\mathcal{C}_0 \subset \mathcal{C}_b$ donne le résultat.

Réciproquement, soit $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe alors $A > 0$ tel que $\mathbb{P}_X(\mathbb{R}\backslash[-A,A]) \leq \varepsilon$. Soit donc la fonction trapèze $\varphi \in \mathcal{C}^0$ valant 1 sur $[-A,A]$, 0 en dehors de $[-2A,2A]$. Alors

$$\int_{\mathbb{R}} 1-\varphi \mathrm{d}\mathbb{P}_X = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}\backslash[-A,A]} \mathrm{d}\mathbb{P}_X \leq \varepsilon.$$

On a donc

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[f(X_n)] - E[f(X)] &= \int_{\mathbb{R}} f\mathrm{d}\mathbb{P}_{X_n} - \int_{\mathbb{R}} f\mathrm{d}\mathbb{P}_X \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(1-\varphi)\mathrm{d}\mathbb{P}_{X_n} + \left(\int_{\mathbb{R}} f\varphi\mathrm{d}\mathbb{P}_{X_n} - \int_{\mathbb{R}} f\varphi\mathrm{d}\mathbb{P}_X\right) - \int_{\mathbb{R}} f(1-\varphi)\mathrm{d}\mathbb{P}_X \\ &= A_n + B_n + C_n.\end{aligned}$$

Comme $f\varphi$ est continue à support compact, par hypothèse, $B_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Ensuite,

$$|A_n| \leq \|f\|_\infty \int_{\mathbb{R}} (1-\varphi)\mathrm{d}\mathbb{P}_{X_n} = \|f\|_\infty \left(1 - \int_{\mathbb{R}} \varphi\mathrm{d}\mathbb{P}_{X_n}\right).$$

Par le lemme de Fatou, on a donc

$$\limsup_{n\to+\infty} |A_n| \leq \|f\|_\infty \left(1 - \int_{\mathbb{R}} \varphi \mathrm{d}\mathbb{P}_X\right) = \|f\|_\infty \int_{\mathbb{R}} (1-\varphi)\mathrm{d}\mathbb{P}_X \leq \varepsilon \|f\|_\infty.$$

Enfin, $|C_n| \leq \|f\|_\infty \varepsilon$. On en déduit donc que

$$\limsup_{n\to+\infty} \left(\mathbb{E}[f(X_n)] - E[f(X)]\right) \leq 2\varepsilon \|f\|_\infty$$

ce qui donne le résultat car ε est arbitraire. On a la convergence en loi. $\square$

Théorème 2 (Paul Lévy)**.** *Soit $X, X_1, \cdots, X_n, \cdots$ des variables aléatoires réelles. Alors*

$$X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} X \iff \phi_{X_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{C.S.} \phi_X.$$

Démonstration. L'implication est claire.

Réciproquement, montrons que le résultat est bon lorsque f est la transformée de Fourier d'une fonction L^1, disons φ. Alors par le lemme de Riemann-Lebesgue, $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et par Fubini,

$$\mathbb{E}[f(X_n)] = \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}} e^{-itX_n}\varphi(t)\mathrm{d}t\right] = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\mathbb{E}[e^{-itX_n}}_{=\phi_{X_n}(-t)}\varphi(t)\mathrm{d}t.$$

Par le théorème de convergence dominée, φ étant intégrable et ϕ bornée, ceci converge vers

$$\int_{\mathbb{R}} \phi_X(-t)\varphi(t)\mathrm{d}t = \mathbb{E}[f(X)]$$

par Fubini encore.

Utilisons la densité de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Soit $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ et $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ avec $\|f-g\|_\infty \leq \varepsilon$. Alors

$$|\mathbb{E}[f(X_n)] - \mathbb{E}[f(X)]| \leq |\mathbb{E}[(f-g)(X_n)| + |\mathbb{E}[g(X_n)] - \mathbb{E}[g(X)]| + |\mathbb{E}[(f-g)(X)| \leq 2\varepsilon + |\mathbb{E}[g(X_n)] - \mathbb{E}[g(X)]|.$$

En passant à la limite supérieure, on a le résultat. $\square$

Théorème 3 (TCL)**.** *Soit $(X_n)_n$ suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées admettant des moments d'ordre 2. On note $\mu = \mathbb{E}[X_1], \sigma^2 = \mathrm{Var}(X_1)$. Alors*

$$\frac{S_n - \mu n}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1).$$

Démonstration. Sans perte de généralité, on peut supposer $\sigma = 1, \mu = 0$ (il suffit de retirer μ puis de diviser par σ chaque variable aléatoire). En utilisant le théorème de Lévy, il suffit de montrer que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \mathbb{E}[e^{itS_n/\sqrt{n}}] \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-t^2/2}.$$

$\phi := \phi_{X_1}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ car admet un moment d'ordre 2. On peut donc écrire $\phi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \phi(0) + \frac{t}{\sqrt{n}}\phi'(0) + \frac{t^2}{2n}\phi''(0) + o_{n\to+\infty}(1/n)$. On obtient alors $\phi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \frac{t^2}{2n} + o_{n\to+\infty}(1/n)$.

Or,

$$\mathbb{E}[e^{itS_n/\sqrt{n}}] = \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^n \exp\left(it\frac{X_k}{\sqrt{n}}\right)\right] \underset{\perp\!\!\!\perp}{=} \prod_{i=1}^n \mathbb{E}\left[\exp\left(it\frac{X_k}{\sqrt{n}}\right)\right] = \phi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n.$$

Or,

$$\left(1 - \frac{t^2}{2n} + o_{n\to+\infty}(1/n)\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-t^2/2}$$

ce qui conclut la preuve. $\square$

Prouvons le dernier résultat. On présente une preuve qui se généralise. On peut aussi passer au logarithme complexe et cette méthode est à connaître dans le cas où l'on manque de temps. Dans n'importe quelle algèbre munie d'une norme d'algèbre où l'on définit l'exponentielle via sa série, si $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$,

$$\begin{aligned}
\left\|\left(1+\frac{a_n}{n}\right)^n - \exp(a)\right\| &= \left\|\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}a_n^k - \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}a_n^k\right\| \\
&= \left\|\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k!}a_n^k + \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k!}-\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}\right)a_n^k\right\| \\
&\le \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k!}\|a_n\|^k + \sum_{k=0}^{n}\left|\underbrace{\frac{1}{k!}-\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}}_{\ge 0}\right|\|a_n\|^k \\
&= \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k!}\|a_n\|^k + \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k!}-\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}\right)\|a_n\|^k \\
&= \exp(\|a\|) - \left(1+\frac{\|a_n\|}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$