Autour de Γ et une caractérisation

Chen Thomas
t.chen.thomas1[at]gmail.com

20 mai 2024

Attention

1. Ce document contient certainement des coquilles. N'hésitez pas à me le signaler. De même si vous avez une question.
2. Pour les recasages, ce sont les miens mais ce développement se case peut-être ailleurs et je n'y ai pas réfléchi.
3. Il se peut que ce développement dure plus de 15 minutes. J'ai essayé de le découper pour faire des recollements personnalisés.

Leçons

- 229 : Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.
- 239 : Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.
- 244 : Exemples d'études et d'applications de fonctions usuelles et spéciales.

Références

[1] X. Gourdon. *Analyse.* Ellipses, 2020.

Attention ! C'est un développement fait maison. Ce thème est super classique, il y a beaucoup de références dont [1]. Toutefois, sur la caractérisation de Γ, je n'ai pas trouvé de référence qui fait exactement pareil.

On présente ce développement sous forme de questions.

1. Donner le domaine de définition de Γ. On le note D.
2. Montrer que Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$. On explicitera la valeur de $\Gamma^{(k)}$, pour $k \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que $\Gamma(1) = 1$. On dira que Γ vérifie la propriété (1).
4. Montrer que $\forall x > 0, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. Dans la suite, on dira que Γ vérifie la propriété (2). En déduire la valeur de $\Gamma(n+1)$.
5. Montrer que $\ln \Gamma$ est convexe. Dans la suite, on dira que Γ vérifie la propriété (3).
6. Soit f, une fonction strictement positive sur D vérifiant les propriétés (1), (2), (3). On pose $g = \ln f$.
   (a) Montrer que $x \mapsto g(x) - \ln \Gamma(x)$ est 1-périodique.
   (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, g(n) = \ln \Gamma(n)$.
   (c) Montrer que $f = \Gamma$.

Démonstration. Dans toute la suite, on notera $h_x(t) = t^{x-1}e^{-t}$.

1. Au voisinage de 0, $h_x(t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{t^{1-x}}$ Or l'étude des intégrale de Riemann nous indique que $t \mapsto \frac{1}{t^{1-x}}$ est intégrable en 0 dès lors que $x > 0$. Par ailleurs, $t^2 h_x(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi, comme h_x est continue sur $\mathbb{R}$, on en déduit que Γ est bien définie dès lors que $x > 0$.
2. - $\forall t > 0, x \mapsto h_n(t,x) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{+*}) : \forall t > 0, \forall x > 0, \frac{\partial^n h_x}{\partial x^n}(t,x) = \ln^n(t)t^{x-1}e^{-t}$.
   - Pour tout $x > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}, t \mapsto \frac{\partial^n h_x}{\partial x^n}(t,x)$ est Lebesgue-mesurable.

   Domination : Soit (a,b) tels que $0 < a < 1 < b < +\infty$. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [a,b], \forall t > 0, |\ln^n(t)|t^{x-1}e^{-t} \leq |\ln^n(t)|e^{-t} \times (t^{a-1} + t^{b-1}) := g_n(t).$$

   Il suffit de montrer que g_n est intégrable ce qui est le cas car elle est continue, et par croissance comparées, elle est intégrable en 0 et $+\infty$. Par le théorème de dérivation sous le signe intégral, j'ai :

$$\Gamma \in \mathcal{C}^\infty, \forall x > 0, \Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^n h_x}{\partial x^n}(t,x)\mathrm{d}t.$$

3. $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t = 1$.
4. Soit $0 < a < b$, deux réels. Alors :

$$\int_a^b t^x e^{-t}\mathrm{d}t = [-t^x e^{-t}]_a^b + x\int_a^b t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t.$$

   Le crochet tend vers 0 quand $a \to 0, b \to +\infty$. Or, pour $x > 0$, l'intégrale de droite converge vers $x\Gamma(x)$. L'égalité passe donc la limite en :

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

   Une simple récurrence nous dit donc que :

$$\Gamma(n+1) = n!$$

5. Par la question 2, nous savons que pour $x > 0$:

$$|\Gamma'(x)| \leq \int_0^{+\infty} |\ln(t)|t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} |\ln(t)|t^{\frac{x-1}{2}}e^{-t/2}t^{\frac{x-1}{2}}e^{-t/2}\mathrm{d}t.$$

   J'utilise donc Cauchy-Schwarz :

$$|\Gamma'(x)| \leq \sqrt{\int_0^{+\infty}\left(|\ln(t)|t^{\frac{x-1}{2}}e^{-t/2}\right)^2\mathrm{d}t}\sqrt{\int_0^{+\infty}\left(t^{\frac{x-1}{2}}e^{-t/2}\right)^2\mathrm{d}t}$$

   Je développe le carré, et j'ai au final :

$$|\Gamma'(x)| \leq \sqrt{\int_0^{+\infty}\ln^2(t)t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t}\sqrt{\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t} = \Gamma''(x)\Gamma(x).$$

   D'où :

$$\Gamma''(x)\Gamma(x) - (\Gamma'(x))^2 > 0$$

   Par ailleurs,

$$\ln(\Gamma)'' = \frac{\Gamma''\Gamma - \Gamma'^2}{\Gamma^2} > 0$$

   Donc $\ln\Gamma$ est convexe.

6. (a)

$$\forall x > 0, \ln(\Gamma(x+1)) = \ln(x) + \ln(\Gamma(x)) \ ; \ \forall x > 0, \ln(f(x+1)) = \ln(x) + \ln(f(x))$$

D'où :

$$\forall x > 0, (\ln(\Gamma) - g)(x+1) = (\ln(\Gamma) - g)(x).$$

C'est la 1-périodicité.

(b) Comme $(\ln(\Gamma) - g)(1) =_{(1)} 0$, par une récurrence immédiate, j'ai :

$$\forall n \in \mathbb{N}, g(n) = \ln(\Gamma(n)).$$

(c) On a que :

$$\frac{g(n+1) - g(n)}{1} = \ln(n) \ ; \ \frac{g(n) - g(n-1)}{1} = \ln(n-1).$$

Par le lemme des pentes croissantes, comme g et $\ln(\Gamma)$ sont convexes, $\forall h \in]0,1]$,

$$\ln(n-1) \leq \frac{g(n+h) - g(n)}{h} \leq \ln(n) \ ; \ \ln(n-1) \leq \frac{\ln(\Gamma(n+h)) - \ln(\Gamma(n))}{h} \leq \ln(n).$$

Autrement dit,

$$\forall h \in]0,1], \ln(n-1) - \ln(n) \leq \frac{(\ln(\Gamma) - g)(n+h) - \underbrace{(\ln(\Gamma) - g)(n)}_{=0}}{h} \leq \ln(n) - \ln(n-1).$$

Et donc :

$$\forall h \in]0,1], |(\ln(\Gamma) - g)(n+h)| \leq \frac{\ln(n) - \ln(n-1)}{h} \leq \ln\left(\frac{n}{n-1}\right).$$

On pose $x = \lfloor x \rfloor + \eta_x$. Ainsi :

$$|(\ln(\Gamma) - g)(x)| \leq \ln\left(\frac{\lfloor x \rfloor}{\lfloor x \rfloor - 1}\right) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ainsi, pour tout $x > 0$, pour tout n naturel,

$$(\ln(\Gamma) - g)(x) =_{\text{périodicité}} (\ln(\Gamma) - g)(x+n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

L'égalité passe donc la limite pour $n \to +\infty$ en :

$$(\ln(\Gamma) - g)(x) = 0$$

D'où :

$$f = \Gamma.$$

□