Une famille de fonctions continues nulle part dérivables

Chen Thomas
t.chen.thomas1[at]gmail.com

20 mai 2024

Attention

1. Ce document contient certainement des coquilles. N'hésitez pas à me le signaler. De même si vous avez une question.
2. Pour les recasages, ce sont les miens mais ce développement se case peut-être ailleurs et je n'y ai pas réfléchi.
3. Il se peut que ce développement dure plus de 15 minutes. J'ai essayé de le découper pour faire des recollements personnalisés.

Leçons

- 228 : Continuité, dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.
- 246 : Séries de Fourier. Exemples et applications.
- 250 : Transformation de Fourier. Applications.

Références

[1] H. Queffelec, C. Zuily. *Analyse pour l'agrégation - Agrégation/Master Mathématiques.* Dunod, 2020.

Tout est dans [1].

Soit $\Lambda = (\lambda_k)_{k\geq 1}$ une suite de réels distincts. On dit qu'elle est séparée lorsque la distance, noté μ_k, entre λ_k et le reste de la suite Λ est strictement positive pour tout $k \geq 1$. Si de plus cette distance tend vers $+\infty$ quand $k \to +\infty$, on dit qu'elle est lacunaire.

Par exemple, lorsque $a > 1$, la suite $(a^n)_{n\geq 1}$ est lacunaire et dans ce cas, $\mu_k = (a-1)a^{k-1}$.

Théorème 1. *On se donne une suite u telle que $u \in \ell^1(\mathbb{N})$. On se donne $\Lambda = (\lambda_k)_{k\geq 1}$ une suite lacunaire de réels et $\mu_n := d(\lambda_n, \Lambda \backslash \{\lambda_n\})$. On pose alors $f(t) = \sum_{n\geq 1} u_n e^{i\lambda_n t}$ pour tout t réel. Si f est dérivable en au moins un point, alors $\mu_n \varepsilon_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.*

On va démontrer ce théorème avec plusieurs résultats préliminaires.

***Proposition* 2.** f est continue sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. f est clairement bien définie sur $\mathbb{R}$ et converge normalement sur $\mathbb{R}$ par la convergence absolue de $\sum_n u_n$. De fait, par le théorème de continuité des séries de fonctions, f est continue sur $\mathbb{R}$. $\square$

***Proposition* 3.** Il existe une fonction $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ telle que $\widehat{\varphi}(x) := \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) e^{-ixt} \mathrm{d}t$ vérifie $\widehat{\varphi}(0) = 1$ et $\mathrm{supp}(\widehat{\varphi}) \subset [-1, 1]$.

Démonstration. Soit ψ une fonction paire plateau de support $[-1,1]$ qui vaut $1/2\pi$ en 0. ψ est alors dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. On note alors $\varphi = \widehat{\psi}$. φ satisfait alors les hypothèses voulues puisque ψ est paire. Puisque la transformée de Fourier envoie $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

On peut prendre un exemple explicite de ψ. Soit $\psi_0 : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{1}{1-x^2}\right) & \text{si } |x|<1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et son support est dans $[-1,1]$: elle est donc dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. On construit alors $\psi = \dfrac{1}{2\pi\psi_0(0)}\psi_0$. □

***Proposition* 4.** Soit $\varphi_n(t) = \mu_n\varphi(\mu_n t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Alors on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-i\lambda_n t}\varphi_n(t)\mathrm{d}t$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| = \int_{\mathbb{R}} \left|f\left(\frac{t}{\mu_n}\right)\right| |\varphi(t)|\mathrm{d}t.$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\widehat{\varphi_n}(x) = \mu_n \int_{\mathbb{R}} \varphi(\mu_n t)e^{-itx}\mathrm{d}t \underset{u=\mu_n t}{=} \int_{\mathbb{R}} \varphi(u)e^{-i\frac{u}{\mu_n}x}\mathrm{d}u = \widehat{\varphi}\left(\frac{x}{\mu_n}\right).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-i\lambda_n t}\varphi_n(t) &= \int_{\mathbb{R}} \sum_{k=1}^{+\infty} u_k e^{i\lambda_k t}e^{-i\lambda_n t}\varphi_n(t)\mathrm{d}t \\
&\underset{\star}{=} \sum_{k=1}^{+\infty} u_k \int_{\mathbb{R}} e^{-i(\lambda_n-\lambda_k)t}\varphi_n(t)\mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} u_k \widehat{\varphi_n}(\lambda_n - \lambda_k) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} u_k \widehat{\varphi}\left(\frac{\lambda_n-\lambda_k}{\mu_n}\right).
\end{aligned}$$

Il suffit de vérifier que $\widehat{\varphi}\left(\dfrac{\lambda_n-\lambda_k}{\mu_n}\right) = \delta_{kn}$. Pour cela, si $k \neq n$, alors par définition de la distance, le numérateur du quotient est supérieur strictement, en valeur absolue, que son dénominateur donnant un quotient strictement supérieur à 1 en valeur absolue. Ainsi, si $k \neq n$, la quantité est en dehors du support de $\widehat{\varphi}$ donc vaut 0. Si $k = n$, le quotient vaut 0 et donc $\widehat{\varphi}(0) = 1$.

Ainsi, on a

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-i\lambda_n t}\varphi_n(t) = u_n.$$

Justifions l'interversion $\star$. Il suffit alors que

$$\sum_{k\geq 1} \int_{\mathbb{R}} |f_k|$$

converge avec $f_k : t \mapsto u_k e^{-i(\lambda_n-\lambda_k)t}\varphi_n(t)$. Mais

$$\int_{\mathbb{R}} |f_k| = |u_k| \int_{\mathbb{R}} |\varphi_n(t)|\mathrm{d}t = |u_k|\|\varphi_n\|_1$$

donc[1] par le théorème d'interversion série-intégrale de Lebesgue, on a justifié l'égalité $\star$.

Il reste la deuxième information de la proposition à prouver. On a

$$|u_n| = \left|\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-i\lambda_n t}\varphi_n(t)\mathrm{d}t\right| = \left|\int_{\mathbb{R}} f\left(\frac{t}{\mu_n}\right)e^{-i\lambda_n/\mu_n t}\varphi(t)\mathrm{d}t\right| \leq \int_{\mathbb{R}} \left|f\left(\frac{t}{\mu_n}\right)\right| |\varphi(t)|\mathrm{d}t.$$

□

1. on somme sur k ! n est fixé.

Passons à la preuve du théorème.

Théorème 5. *Si f est dérivable en 0 avec $f(0) = f'(0) = 0$, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n\lambda_n = 0$. Si f est dérivable en $t_0 \in \mathbb{R}$, on a la même conclusion.*

Démonstration. Supposons f dérivable en 0 avec $f(0) = f'(0) = 0$. Par définition de la dérivabilité, il existe un voisinage de 0 (disons $]-\delta,\delta[$) tel que $\forall x \in]-\delta,\delta[, |f(x)| \leq |x|$. Lorsque $|t| > \delta$, on a

$$|f(t)| \leq \underbrace{\sum_{k=1}^{+\infty} |u_n|}_{=:S} \leq \frac{S}{\delta}|t|$$

donc pour $C = \max(1, S/\delta)$, on a $\forall t \in \mathbb{R}, |f(t)| \leq C|t|$. Cela permet d'avoir l'estimation suivante : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|\mu_n\varepsilon_n| \leq \int_{\mathbb{R}} \underbrace{|\mu_n| \left| f\left(\frac{t}{\mu_n}\right)\right| |\varphi(t)| \,\mathrm{d}t}_{=:g_n(t)}$$

On constate que

$$\frac{f(tx)}{tx} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

pour tout t réel non nul. De fait, par composition de limites, pour tout réel t non nul,

$$\frac{f\left(t\dfrac{1}{\mu_n}\right)}{t\dfrac{1}{\mu_n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

car $\mu_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. De fait, $g_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{C.S.}} 0$ (le cas $t = 0$ est immédiat). On souhaite maintenant avoir une domination :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}, 0 \leq g_n(t) \leq C\mu_n \left|\frac{t}{\mu_n}\right| |\varphi(t)| = C|t||\varphi(t)| \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$$

car $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Par le théorème de convergence dominée $\int_{\mathbb{R}} g_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\varepsilon_n\mu_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

On souhaite maintenant se ramener au cas précédent. Supposons que f soit dérivable en $t_0 \in \mathbb{R}$. On cherche à construire une fonction g qui hérite de propriétés similaires à f. On a

$$f(t + t_0) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_n e^{i\lambda_k t_0} e^{i\lambda_k t}.$$

Considérons alors $g(t) := f(t + t_0) - \alpha e^{i\lambda_1 t} - \beta e^{i\lambda_2 t} = \sum_{k=1}^{+\infty} u_n' e^{i\lambda_k t}$ avec $u_n' = u_n e^{i\lambda_k t_0}$ si $n \geq 3$, $u_2' = \beta + u_2 e^{i\lambda_2 t_0}, u_1' = \alpha + u_1 e^{i\lambda_1 t_0}$. g est construite de sorte que $\forall n \geq 3, |u_n'| = |u_n|$ avec (α, β) paramètres libres. Imposer $g(0) = g'(0) = 0$, c'est demander

$$f(t_0) = \alpha + \beta \;;\; \frac{f'(t_0)}{i} = \alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2 2.$$

Ce système est inversible car son déterminant est $\lambda_2 - \lambda_1 \neq 0$. D'après précédent, on en déduit que $\mu_n u_n' \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\mu_n u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. □

***Corollaire* 6.**
Il existe des fonctions continues nulle part dérivable.

Démonstration. Il suffit de chercher (u_n) tel que $u \in \ell^1(\mathbb{N})$ mais $u_n\mu_n$ ne convergeant pas vers 0. Considérons alors $u_n = a^n, \lambda_n = b^n$ avec $b > 1$, $ab \geq 1$ et $a < 1$, par exemple $a = \frac{1}{b}$. Alors la série $\sum a^n$ converge puisque $0 < a < 1$ mais $(ab)^n$ ne tend pas vers 0 en $+\infty$. On a alors les fonctions de Weierstrass qui conviennent :

$$f : t \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{k=1}^{+\infty} a^k e^{ib^k t} \in \mathbb{C}$$

pour $ab \geq 1, 0 \leq a < 1, b > 1$. □