Inégalités de Kolmogorov

Chen Thomas
t.chen.thomas1[at]gmail.com

20 mai 2024

Attention

1. Ce document contient certainement des coquilles. N'hésitez pas à me le signaler. De même si vous avez une question.
2. Pour les recasages, ce sont les miens mais ce développement se case peut-être ailleurs et je n'y ai pas réfléchi.
3. Il se peut que ce développement dure plus de 15 minutes. J'ai essayé de le découper pour faire des recollements personnalisés.

Leçons

- 218 : Formules de Taylor. Exemples et applications.

Références

[1] S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas. *Exercices de mathématiques. Oraux X-ENS, Analyse 1.* Cassini, 2007.

Pour une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, si $f^{(n)}$ existe et est bornée, on note $M_n = \|f^{(n)}\|_\infty$.

Théorème 1. *[1]*

1. *Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. On suppose que f, f'' sont bornées sur $\mathbb{R}$. Alors*
$$M_1 \leq \sqrt{2M_0M_2}.$$
2. *Soit $f \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. On suppose que M_0 et M_n sont finis. Alors pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, M_k est fini et*
$$M_k \leq 2^{\frac{k(n-k)}{2}} M_0^{1-\frac{k}{n}} M_n^{\frac{k}{n}}.$$

Démonstration. 1. Soit $x \in \mathbb{R}, h > 0$. Par l'inégalité de Taylor-Lagrange, on a
$$|f(x+h) - f(x) - hf'(x)| \leq \frac{h^2}{2} M_2$$
et
$$|f(x-h) - f(x) + hf'(x)| \leq \frac{h^2}{2} M_2.$$
Ainsi, par inégalité triangulaire,
$$|f(x+h) - f(x-h) - 2hf'(x)| = |[f(x+h) - f(x) - hf'(x)] - [f(x-h) - f(x) + hf'(x)]| \leq h^2 M_2.$$
Par la deuxième inégalité triangulaire, on a
$$|f(x+h) - f(x-h) - 2hf'(x)| \geq |2hf'(x)| - |f(x+h) - f(x-h)| \geq |2hf'(x)| - 2M_0.$$

Ainsi,
$$2h|f'(x)| \leq h^2 M_2 + 2M_0.$$
On en déduit
$$|f'(x)| \leq \frac{h}{2}M_2 + \frac{1}{h}M_0 =: f(h).$$
Cela tient pour tout $h > 0$ donc prenons un h optimisé. On a f dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $f'(h) = \dfrac{M_2}{2} - \dfrac{1}{h^2 M_0}$ donc $f'(h_*) = 0 \iff h_* = \sqrt{\dfrac{M_2}{2M_0}}$ – on rappelle qu'on étudie sur $\mathbb{R}^{+*}$ –. On a alors $f(h_*) = \sqrt{2M_0M_2}$ et
$$|f'(x)| \leq \sqrt{2M_0M_2}.$$
Cela tient pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc
$$M_1 \leq \sqrt{2M_0M_2}.$$

2. Pour le cas général, déjà, établissons l'existence des M_k pour $0 \leq k \leq n$. Soit $x \in \mathbb{R}, h > 0$. Par l'inégalité de Taylor-Lagrange, on a
$$\left| f(x+h) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}h^k \right| \leq \frac{h^n}{n!}M_n.$$
Par la deuxième inégalité triangulaire, on a donc, comme précédemment,
$$\left| \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}h^k \right| \leq \frac{h^n}{n!}M_n + 2M_0.$$
Soit $0 < h_1 < \cdots < h_{n-1}$ $n-1$ réels. L'inégalité précédente est alors valable pour $h_1, \cdots, h_{n-1}$. Notons X vecteur colonne vérifiant $[X]_i = f^{(i)}(x)$ et $A = \left(\dfrac{h_i^j}{j!}\right)_{1 \leq i,j \leq n-1}$. Alors
$$\forall 1 \leq i \leq n-1, [AX]_i \leq 2M_0 + \frac{h_i^n}{n!}M_n.$$
On en déduit donc que
$$\|AX\|_\infty \leq 2M_0 + \frac{h_{n-1}^n}{n!}M_n.$$
A étant inversible, on a
$$\|X\|_\infty = \|A^{-1}AX\|_\infty \leq \|A^{-1}\|\|AX\|_\infty \leq \|A^{-1}\| \left(2M_0 + \frac{h_{n-1}^n}{n!}M_n\right).$$
On obtient une majoration indépendante de x de chaque $f^{(i)}(x)$ et ce, pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc les M_i sont finis.

Montrons maintenant l'inégalité souhaitée par récurrence. On remarque que pour n fixé, le cas $k = 0$ et $k = n$ est immédiat. On considère l'hypothèse :
$$(H_n) : \forall f \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \forall k \in [\![0, n]\!], M_k \leq 2^{\frac{k(n-k)}{2}} M_0^{1-\frac{k}{n}} M_n^{\frac{k}{n}}$$
pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour $n = 0$ et $n = 1$, il n'y a rien à faire.

- Pour $n = 2$, il s'agit de montrer le cas $k = 1$. Cela est fait en première question.
- Supposons le résultat acquis jusqu'au rang n. Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}$. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Alors $f^{(k-1)}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ et on peut appliquer la première question pour obtenir :
$$M_k^2 \leq 2M_{k-1}M_{k+1}.$$

On majore M_{k-1} en utilisant l'hypothèse H_k appliqué à f pour l'indice $k-1$:

$$M_{k-1} \leq 2^{\frac{k-1}{2}} M_0^{\frac{1}{k}} M_k^{\frac{k-1}{k}}.$$

On majore M_{k+1} en posant $g = f^{(k)}$ et en appliquant H_{n+1-k} sur g pour l'indice 1 – on note $\widetilde{M}$ l'analogue de M pour g –, on a

$$\widetilde{M}_1 \leq 2^{\frac{n+1-k-1}{2}} \widetilde{M}_0^{1-\frac{1}{n+1-k}} \widetilde{M}_{n+1-k}^{\frac{1}{n+1-k}}.$$

On remplace $\widetilde{M}_i$ par M_{i+k} et on obtient

$$M_{k+1} \leq 2^{\frac{n-k}{2}} M_k^{\frac{n-k}{n+1-k}} M_{n+1}^{\frac{1}{n+1-k}}.$$

Ainsi,

$$M_k^2 \leq 22^{\frac{k-1}{2}} M_0^{\frac{1}{k}} M_k^{\frac{k-1}{k}} 2^{\frac{n-k}{2}} M_k^{\frac{n-k}{n+1-k}} M_{n+1}^{\frac{1}{n+1-k}} = 2^{\frac{n+1}{2}} M_0^{\frac{1}{k}} M_k^{1-\frac{1}{k}+\frac{n-k}{n+1-k}} M_{n+1}^{\frac{1}{n+1-k}}.$$

On isole tous les M_k à gauche et la puissance de M_k ainsi obtenue est

$$\begin{aligned} 2 - \left(1 - \frac{1}{k} + \frac{n-k}{n+1-k}\right) &= \frac{k(n+1-k) + n + 1 - k - k(n-k)}{k(n+1-k)} \\ &= \frac{k(n-k) + k + n + 1 - k - k(n-k)}{k(n+1-k)} \\ &= \frac{n+1}{k(n+1-k)}. \end{aligned}$$

Ainsi, en mettant tout à la puissance $\dfrac{k(n+1-k)}{n+1}$, on obtient

$$M_k \leq 2^{\frac{k(n+1-k)}{2}} M_0^{1-\frac{k}{n+1}} M_{n+1}^{\frac{k}{n+1}}.$$

Ainsi, par principe de récurrence, on obtient le résultat.

□

Remarque : l'inégalité n'est pas optimale. Considérons le cas $n = 3$ *et* $k = 1$*. Alors on peut montrer que* $M_1 \leq \dfrac{1}{2} 9^{1/3} M_0^{\frac{2}{3}} M_3^{\frac{1}{3}}$ *ce qui est mieux que* $M_1 \leq 2 M_0^{\frac{2}{3}} M_3^{\frac{1}{3}}$*. Pour ce faire, on peut montrer, de la même manière qu'au point* 1 *que*

$$\forall x \in \mathbb{R}, |f'(x)| \leq \frac{M_3 h^2}{6} + \frac{M_0}{h}$$

et optimiser en h *pour obtenir* $h_* = \left(\dfrac{3M_0}{M_3}\right)^{1/3}$ *et obtenir la majoration souhaitée. On pourra consulter le sujet* *Centrale PC 2001 Maths 1.*