Développement asymptotique de la série harmonique

Chen Thomas
t.chen.thomas1[at]gmail.com

20 mai 2024

Attention

1. Ce document contient certainement des coquilles. N'hésitez pas à me le signaler. De même si vous avez une question.
2. Pour les recasages, ce sont les miens mais ce développement se case peut-être ailleurs et je n'y ai pas réfléchi.
3. Il se peut que ce développement dure plus de 15 minutes. J'ai essayé de le découper pour faire des recollements personnalisés.

Leçons

- Je n'utilise pas ce développement.

Références

[1] S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas. *Exercices de mathématiques. Oraux X-ENS, Analyse 1.* Cassini, 2007.

***Proposition* 1.** $\forall \alpha > 1, \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}}$.

Démonstration. On procède par comparaison série intégrale. Par décroissance de $t \in [1, +\infty[\mapsto 1/t^\alpha$, on a

$$\forall k \geq 2, \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}.$$

Fixons $n, N \in \mathbb{N}, N \geq n$. Par télescopage,

$$\int_{n+1}^{N+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leq \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_n^N \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$$

ce qui donne, car $\alpha \neq 1$

$$\left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_{n+1}^{N+1} \leq \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \leq \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_n^N.$$

Ainsi,

$$\forall n \leq N \in \mathbb{N}, \frac{-1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{(N+1)}^{\alpha-1} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}\right) \leq \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{-1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{N^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right).$$

Par Riemann, le terme du milieu converge quand $N \to +\infty$. L'inégalité passe donc à la limite quand $N \to +\infty$ en

$$\frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}}.$$

Par théorème d'encadrement,

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}}.$$

□

Théorème 2. *[1] On a*

$$H_n = \ln(n) - \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

où $H_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ *pour* $n \in \mathbb{N}^*$.

Démonstration. 1. Pour tout $k \geq 2$, par comparaison série-intégrale

$$\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

Ainsi, en sommant,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 + \ln(n+1) - 2 \leq H_n \leq 1 + \ln(n)$$

et par encadrement, $H_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

2. Posons $u_n = H_n - \ln(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n &= H_{n+1} - H_n - \ln(n+1) + \ln(n)\\ &= \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\\ &= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} + O_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right) = O_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right).\end{aligned}$$

Ainsi, puisque par Riemann la série $\sum_{n\geq1} \frac{1}{n^2}$ converge, par positivité du terme général, par comparaison, on a la convergence de $\sum u_{n+1} - u_n$ ce qui entraine la convergence de u. Il existe donc $\gamma \in \mathbb{R}$ [1] tel que $H_n - \ln(n) = \gamma + o_{n\to+\infty}(1)$.

3. Posons $v_n = H_n - \ln(n) - \gamma$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} - u_n\\ &= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)\\ &= \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)\\ &= \frac{-1}{2n^2} + +o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right).\end{aligned}$$

Par le théorème de sommation des équivalents (puisque $\left(\frac{-1}{2n^2}\right)_{n\geq1}$ est de signe constant), on a

$$-v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k\geq n}^{+\infty} v_{k+1} - v_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k\geq n} -\frac{1}{2k^2} \sim \frac{-1}{2(n-1)}.$$

Ainsi, $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$.

1. constante d'Euler-Mascheroni, environ 0,577

4. Posons $w_n = H_n - \ln(n) - \gamma - \dfrac{1}{2n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^*, w_{n+1} - w_n &= \frac{1}{n+1} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2n} \\ &= \frac{1}{2n}\left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + \frac{1}{2n} \\ &= \frac{1}{2n^3} - \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \\ &= \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right).\end{aligned}$$

Par le théorème de sommation des équivalents (puisque $\left(\dfrac{1}{n^3}\right)_{n\geq 1}$ est de signe constant), on a

$$-w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k\geq n}^{+\infty} w_{k+1} - w_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k\geq n} -\frac{1}{6k^3} \sim \frac{1}{12(n-1)^2}.$$

Ainsi, $w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{12n^2}$.

5. On continue. Posons $x_n = H_n - \ln(n) - \gamma - \dfrac{1}{2n} + \dfrac{1}{12n^2}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}x_{n+1} - x_n &= \frac{1}{n+1} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{12(n+1)^2} - \frac{1}{12n^2} \\ &= \frac{1}{2n}\left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3}\right) - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} - \frac{1}{4n^4}\right) + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{12n^2}\left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^4}\right) \\ &= \frac{1}{2n^3} - \frac{1}{2n^4} - \frac{1}{3n^3} + \frac{1}{4n^4} - \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{12n^4}\left(1 + 2\left(\frac{-1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) + \frac{1}{n^2}\right) + o\left(\frac{1}{n^4}\right) \\ &= \frac{1}{6n^3} - \frac{1}{4n^4} + \frac{1}{12n^2}\left(-\frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}\right) + o\left(\frac{1}{n^4}\right) \\ &= 0 + o\left(\frac{1}{n^4}\right).\end{aligned}$$

Par le théorème de sommation des relations de comparaisons, puisque $\left(\dfrac{1}{n^4}\right)_{n\geq 1}$ est de signe constant,

$$-x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k\geq n+1} x_{n+1} - x_n = o_{n\to+\infty}\underbrace{\left(\sum_{k\geq n+1} \frac{1}{n^4}\right)}_{\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{3n^3}}$$

donc par comparaison, $x_n = o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$. Ainsi,

$$H_n = \ln(n) - \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

□