I] Ensemble récursivement énumérable

Définition 1 Machine de Turing

Une machine de Turing est un 7-uple $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{acc}, q_{rejet})$

où

Q ensemble fini d'état

Σ ensemble des lettre (alphabet) sans le symbole $\sqcup$

Γ alphabet de bande $\Sigma \subseteq \Gamma$, $\sqcup \in \Gamma$

δ $Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L, R\}$

q_0 état de départ ($q_0 \in Q$)

q_{acc} et q_{rejet} sont respectivement les états d'acceptation et de rejet

Dire que c'est une fonc° partielle

Pas écrire ce qu'il se passe si x pas dans L. En rej.

Définition 2 Un ensemble L est dit récursivement énumérable si il existe M machine de Turing tel $\forall x \in L$, M accepte x $\Leftarrow\Rightarrow$ noté $L(M) = L$.

Définition 3 (Enumérateur)

Un énumérateur est un machine de Turing avec un entrée vide et un ruban de sortie où M ne peut qu'avancer et M écrit $w_0 \# w_1 \# \dots$

On dit que $w \in \Sigma^*$ est reconnu par M si $w = w_i$.

Théorème 4 Un ensemble est récursivement énumérable si et seulement si il est énuméré par un énumérateurs.

= dénombrable

DEV 1

II] Ensemble récursifs ou décidable

Définition 5 Un ensemble L est dit décidable ou récursif si il existe M tel que M termine sur tout entrée et $x \in L \Leftrightarrow M$ accepte x

Exemple 6 Un langage fini est récursif et récursivement dénombrable

Proposition 7 Un ensemble récursif est récursivement énumérables.

Exple : Busy-castor : rec. énum ...

Théorème 8 L'ensemble A_x des codages de machine de Turing M et d'une entrée x tel que M s'arrête sur x est récursivement énumérables mais pas récursifs.

$A_x = \{ (M, x) ; M \text{ s'arrête sur } x \}$

Leçon 922 Ensemble récursif, récursivement énumérables (922)

Coudert Patrice

2/3

III Opérations sur ces langages ← dém. possible.

Proposition 9 Les opérations d'union, d'intersections et de passage au complémentaire sont stables pour les ensemble récursif

Proposition 10 Les operation d'union et d'intersection sont stables pour les ensemble recursivement énumerable.

Pas de passage au complémentaire

Théorème 11 Si E et $\bar{E}$ sont récursivement énombrables alors E est récursif

Corollaire 12 $\bar{A}_x$ n'est pas recursivement énumérables ..

(nominal)

IV Exemples d'ensemble non recursifs et non recursivement énumerables

Proposition 13 $A_{cc} = \{(M,x) \mid M \text{ accepte } x\}$ est récursivement enumerable mais pas récursif et donc $\bar{A}_{cc}$ n'est pas recursivement enumerable.

DEV 2

Proposition 14 Le problème du vide, du language complet sont aussi non recursifs

⚠ Concernent les prop. sur les langages reconnus par les MT et pas les prop. concernant le fonctionnement des MT (Mettre des exemples)

Théorème 15 Théorème de Rice
Soit P une propriété non triviale (un langage vérifie P et un language ne verifie pas P).
$A = \{\langle M\rangle,\ L(M) \text{ verifie } P\}$ à déf !!
Alors A est non récursif

DEV 3

Remarque 16 Le théorème de Rice donne une preuve plus simple de la proposition 14

Théorème 17 $\{\langle D\rangle \mid D$ reconnait un ensemble récursif$\}$ n'est ni récursivement énumérables ni co-récursivement enumérable.

décideur.

⚠ attention ne veut pas dire D = décideur (il pourrait y avoir une autre machine M = décideur tq $L(M) = L(D)$ → réc.)
Bonne formulation = D = décideur.

VI Conséquences pratiques.

Proposition 18 ∃ Il n'existe pas d'Algorithmes où même de semi-algorithme pour trouver les boucles infinis d'un programme.

Proposition 19. L'equivalence des deux programmes ne peut non plus être décidée par un algoritme ou un semi algorithmes.

Proposition 20

Si A est un problème consistant à savoir si l'entrée appartient à un ensemble, Alors il n'existe pas d'algorithme pour trouver la correction.

Remarque 21

Tout ce qui a été dit ne depend pas du modéle de Machine de Turing choisi.