Lemme de la grenouille

Chen Thomas
t.chen.thomas1[at]gmail.com

20 mai 2024

Attention

1. Ce document contient certainement des coquilles. N'hésitez pas à me le signaler. De même si vous avez une question.
2. Pour les recasages, ce sont les miens mais ce développement se case peut-être ailleurs et je n'y ai pas réfléchi.
3. Il se peut que ce développement dure plus de 15 minutes. J'ai essayé de le découper pour faire des recollements personnalisés.

Leçons

- 204 : Connexité. Exemples d'applications.
- 223 : Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications.
- 226 : Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations.

Références

[1] X. Gourdon. *Analyse*. Ellipses, 2020.

[2] S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas. *Exercices de mathématiques. Oraux X-ENS, Analyse 1*. Cassini, 2007.

***Proposition* 1.** [1] Soit (E, d) un espace métrique compact et $u \in E^{\mathbb{N}}$. On suppose que $d(u_{n+1}, u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Alors l'ensemble des valeurs d'adhérence Γ de u est un compact connexe.

Démonstration. On rappelle que

$$\Gamma = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\{u_p : p \geq n\}}.$$

Ce sont les éléments de E atteint une infinité de fois à ε près pour $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit. Mais Γ est alors un fermé – en tant qu'intersection quelconque de fermé – dans le compact E : il est donc compact.

Supposons dorénavant que Γ n'est pas connexe. Soit donc A, B deux fermés de E tels que $\Gamma = A \cup B$ et $A \cap B = \emptyset$. A et B sont des fermés de E donc compacts. L'application $d : (x, y) \in A \times B \mapsto d(x, y) \in \mathbb{R}^+$ est alors continue sur un compact donc admet un infimum sur ce compact : on le note $\alpha = d(A, B)$. Puisque cet infimum est atteint, $\alpha > 0$ puisque $A \cap B = \emptyset$. On construit alors un « sur-ouvert » de A et B d'intersection vide : soit

$$A' = \{x \in E : d(x, A) < \alpha/4\}$$

et

$$B' = \{x \in E : d(x, B) < \alpha/4\}.$$

Par construction, A', B' sont deux ouverts de E d'intersection non vide. Soit $K = E \backslash \{A' \cup B'\}$. K est alors un fermé de E donc compact. Par construction, $K \cap \Gamma = \emptyset$. On va montrer que c'est absurde. L'image suivante est tirée de Gourdon.

DDD.png

Par hypothèse, il existe un entier N_0 tel que $\forall n \geq N, d(u_{n+1}, u_n) < \alpha/3$. On cherche des valeurs d'adhérences. Soit $N \geq N_0$. Le raisonnement qui suit tiendra donc pour tout $N \geq N_0$. Soit $x_0 \in A$. Il existe alors un rang $n_1 \geq N$ tel que $d(u_{n_1}, x_0) < \alpha/4$. Soit $y_0 \in A$. Il existe alors un rang $n_2 \geq n_1$ tel que $d(u_{n_2}, y_0) < \alpha/4$. Soit n_0 le plus petit élément de l'ensemble suivant

$$\{n \geq n_1 : u_n \notin A'\}$$

Ce plus petit élément existe puisqu'il contient n_2. Alors $u_{n_0-1} \in A'$ et $u_{n_0} \notin A'$. On veut montrer que $u_{n_0} \notin B'$. Pour cela,

$$d(u_{n_0}, B) \geq d(u_{n_0-1}, B) - d(u_{n_0}, u_{n_0-1}) \geq d(A, B) - d(u_{n_0-1}, A) - d(u_{n_0}, u_{n_0-1}) \geq \alpha - \frac{\alpha}{4} - \frac{\alpha}{4} = \frac{\alpha}{2} > \frac{\alpha}{4}$$

Donc $u_{n_0} \in K$. Que vient-on de montrer ? On vient de montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}_{\geq N_0}$, il existe $n_0 \geq N$ tel que $u_{n_0} \in K$. K admet donc une infinité d'éléments de la suite u. Soit donc φ, extractrice associée à ces éléments dans K. K étant compact, u_φ admet une valeur d'adhérence dans K : ainsi, $K \cap \Gamma \neq \emptyset$ ce qui est absurde ! Γ est donc connexe. $\square$

***Proposition* 2.** [2] Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ continue. Soit u une suite réelle définie par $u_0 \in [0,1]$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$. Alors u converge si, et seulement si $|u_{n+1} - u_n| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

Démonstration. Avant toute chose, la suite u est bien définie puisque f stabilise $[0,1]$. Le sens direct est clair. Supposons que $|u_{n+1} - u_n| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Par la proposition précédente, l'ensemble des valeurs d'adhérence de u est un connexe. Remarquons que toute valeur d'adhérence de u est point fixe pour f. En effet, soit φ une extractrice telle que $(u_{\varphi(n)})_n$ converge, disons vers $\ell \in [0,1]$. Alors puisque $u_{\varphi(n)+1} - u_{\varphi(n)} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, on a $u_{\varphi(n)+1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$ et alors,

$$\ell \underset{n \to +\infty}{\longleftarrow} u_{\varphi(n)+1} = f(u_{\varphi(n)}) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} f(\ell)$$

par continuité de f. Donc ℓ est point fixe de f.

Supposons donc que u ne converge pas. Vu que u est bornée, u admet une valeur d'adhérence et la non-convergece de u entraine que u admet une deuxième valeur d'adhérence. Soit donc ℓ, ℓ' deux valeurs d'adhérence distinctes, disons $\ell < \ell'$. Par connexité, $[\ell, \ell']$ contient des valeurs d'adhérence, en particulier $\dfrac{\ell + \ell'}{2}$ est valeur d'adhérence. Autrement dit, pour n suffisamment grand, $u_n \in [\ell, \ell']$ donc u atteint un point fixe de f à partir d'un certain rang. A partir de ce rang, u est alors stationnaire donc convergente : absurde.

Ainsi, u converge. $\square$