Suite lente

Chen Thomas
t.chen.thomas1[at]gmail.com

20 mai 2024

Attention

1. Ce document contient certainement des coquilles. N'hésitez pas à me le signaler. De même si vous avez une question.
2. Pour les recasages, ce sont les miens mais ce développement se case peut-être ailleurs et je n'y ai pas réfléchi.
3. Il se peut que ce développement dure plus de 15 minutes. J'ai essayé de le découper pour faire des recollements personnalisés.

Leçons

- 223 : Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications.
- 224 : Exemples de développements asymptotiques de suites et de fonctions.
- 226 : Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations.

Références

[1] J.-E. Rombaldi. *Eléments d'analyse réelle.* EDP Sciences, 2023.

Théorème 1. *[1] Soit f une fonction définie au voisinage de 0 vérifiant $f(x) = x - \alpha x^{p+1} + \beta x^{2p+1} + o_{x\to 0}(x^{2p+1})$ avec $\alpha \in \mathbb{R}_+^*, \beta \in \mathbb{R}^*, p \in \mathbb{N}^*$. Alors il existe $\eta > 0$ tel que $f([0,\eta]) \subset [0,\eta]$ et en posant $u_0 \in]0,\eta]$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $\gamma := \dfrac{(1+p)\alpha^2}{2} - \beta \neq 0$, on a*

$$u_n = \left(\frac{1}{pn\alpha}\right)^{1/p} - \frac{\gamma}{p^2\alpha^2}\left(\frac{1}{pn\alpha}\right)^{1/p}\frac{\ln(n)}{n} + o_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln(n)}{n^{1+\frac{1}{p}}}\right).$$

Démonstration.

1. Puisque $f(x)$ vérifie ce développement limité, je peux trouver g, h continues au voisinage de 0 (car f l'est) telles que dans ce voisinage
   - $f(x) = xg(x)$,
   - $x - f(x) = \alpha x^{p+1}h(x)$,
   - $g \xrightarrow[0]{} 1, h \xrightarrow[0]{} 1$.

   Ainsi, il existe $\eta > 0$ tel que
   $$\forall x \in]0,\eta], g(x) > 0, h(x) > 0.$$
   Ainsi,
   $$\forall x \in]0,\eta], f(x) > 0, x - f(x) > 0.$$
   Ainsi, $\eta \geq x > f(x)$ ce qui donne $f(]0,\eta]) \subset]0,\eta]$.

2. Soit $u_0 \in]0,\eta] \subset]0,\eta]$. Alors $(u_n)_n$ est bien définie par le point précédent. Par ailleurs,

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n - f(u_n) > 0$$

i.e. $(u_n)_n$ est décroissante. Etant minorée par 0, elle converge dans $[0,\eta]$ par le théorème de la limite monotone. De fait, soit $\ell \in \mathbb{R}$ telle que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. Alors l'égalité vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = f(u_n)$ passe à la limite en $\ell = f(\ell)$. Or, pour tout $\ell \in]0,\eta]$, $\ell \neq f(\ell)$. Donc $\ell = 0$ et $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

3. Faisons l'analogie avec les équations différentielles.

> L'idée « analogie » est la suivante :
>
> $$\underbrace{u_{n+1} - u_n}_{\approx u'} \approx \alpha u_n^{p+1}.$$
>
> Donc $u' \approx \alpha u^{p+1}$ ce qui donne $\dfrac{u'}{u^{p+1}} \approx \alpha$. En intégrant, on a
>
> $$\left(\frac{1}{u^p}\right)' \approx \text{constante}.$$
>
> On s'attend donc à ce que $\dfrac{1}{u_{n+1}^p} - \dfrac{1}{u_n^p}$ soit à peu près constante.

Regardons donc la quantité

$$\frac{1}{u_{n+1}^p} - \frac{1}{u_n^p}$$

pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Cette quantité est bien définie car $u_0 \in]0,\eta]$ et cet intervalle est stable par f donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$. On a, puisque $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

$$\begin{aligned}
u_{n+1}^{-p} - u_n^{-p} &= (f(u_n))^{-p} - u_n^{-p} \\
&= (u_n - \alpha u_n^{p+1} + \beta u_n^{2p+1} + o_{n\to+\infty}(u_n^{2p+1}))^{-p} - u_n^{-p} \\
&= u_n^{-p}\left[\left(1 - \alpha u_n^p + \beta u_n^{2p} + o_{n\to+\infty}(u_n^{2p})\right)^{-p} - 1\right] \\
&= u_n^{-p}\left(1 - (-p)\left(-\alpha u_n^p + \beta u_n^{2p}\right) + \frac{(-p)(-p-1)}{2}\left(-\alpha u_n^p + \beta u_n^{2p}\right)^2 - 1 + o_{n\to+\infty}(u_n^{2p})\right) \\
&= u_n^{-p}\left(p\alpha u_n^p - p\left(\beta + \frac{-(p+1)}{2}\alpha^2\right)u_n^{2p} + o_{n\to+\infty}(u_n^{2p})\right) \\
&= p\alpha + p\underbrace{\left(\frac{p+1}{2}\alpha^2 - \beta\right)}_{=\gamma} u_n^p + o_{n\to+\infty}(u_n^p).
\end{aligned}$$

On en déduit

$$u_{n+1}^{-p} - u_n^{-p} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} p\alpha.$$

Par le théorème de Cesàro (ou sommation des équivalents car $\alpha \neq 0$), on a

$$\sum_{k=1}^{n} u_{k+1}^{-p} - u_k^{-p} \underset{n\to+\infty}{\sim} np\alpha.$$

Par télescopage, on en déduit :

$$u_{n+1}^{-p} \underset{n\to+\infty}{\sim} np\alpha$$

et on a $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_{n+1}$ puisque $f(x)/x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$. On a donc

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{1}{np\alpha}\right)^{1/p}.$$

Avec ceci,

$$u_{n+1}^{-p} - u_n^{-p} - p\alpha = p\gamma u_n^p + o_{n\to+\infty}(u_n^p) \underset{n\to+\infty}{\sim} p\gamma \left(\frac{1}{np\alpha}\right)^{p\times 1/p} = \frac{\gamma}{\alpha n}$$

donc par le théorème de sommation des équivalents, puisque $\dfrac{\gamma}{\alpha n} > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n} u_{k+1}^{-p} - u_k^{-p}}_{\underset{n\to+\infty}{\sim} u_n^{-p}} - p\alpha n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\gamma}{\alpha}\ln(n).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} u_n^{-p} &= p\alpha n + \frac{\gamma}{\alpha}\ln(n) + o_{n\to+\infty}(\ln(n)) \\ &= p\alpha n\left(1 + \frac{\gamma}{p\alpha^2}\frac{\ln(n)}{n} + o_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)\right). \end{aligned}$$

Ainsi, en passant à l'exposant $-1/p$, on a

$$\begin{aligned} u_n &= \left[p\alpha n\left(1 + \frac{\gamma}{p\alpha^2}\frac{\ln(n)}{n} + o_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)\right)\right]^{-1/p} \\ &= \left(\frac{1}{p\alpha n}\right)^{1/p}\left[1 - \frac{1}{p}\frac{\gamma}{p\alpha^2}\frac{\ln(n)}{n} + o_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)\right]. \end{aligned}$$

Finalement,

$$u_n = \left(\frac{1}{pn\alpha}\right)^{1/p} - \frac{\gamma}{p^2\alpha^2}\left(\frac{1}{pn\alpha}\right)^{1/p}\frac{\ln(n)}{n} + o_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln(n)}{n^{1+\frac{1}{p}}}\right).$$

□

***Corollaire* 2.** Pour $f = \sin$, on a un développement asymptotique. (de même avec $\tan, \ln(1+\cdot), \sinh, ...$).

Démonstration. Cela s'applique pour $f = \sin$. En effet, $\sin(x) = x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} + o_{x\to 0}(x^5)$. On a donc $\alpha = \dfrac{1}{6}, \beta = \dfrac{1}{120}, p = 2$ et $\gamma = \dfrac{3}{2}\dfrac{1}{6^2} - \dfrac{1}{120} = \dfrac{1}{30}$. Ainsi,

$$u_n = \sqrt{\frac{3}{n}} - \frac{3\sqrt{3}}{10}\frac{\ln(n)}{n\sqrt{n}} + o_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln(n)}{n\sqrt{n}}\right).$$

□