Théorème de stabilité de Liapounov

Chen Thomas
t.chen.thomas1[at]gmail.com

16 mai 2024

Attention

1. Ce document contient certainement des coquilles. N'hésitez pas à me le signaler. De même si vous avez une question.
2. Pour les recasages, ce sont les miens mais ce développement se case peut-être ailleurs et je n'y ai pas réfléchi.
3. Il se peut que ce développement dure plus de 15 minutes. J'ai essayé de le découper pour faire des recollements personnalisés.

Leçons

- 155 : Exponentielle de matrices. Applications.
- 220 : Illustrer par des exemples la théorie des équations différentielles ordinaires.
- 221 : Equations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

Références

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, s'annulant en 0. On conidère l'équation différentielle $y' = f(y), y(0) = y_0$. On suppose que les parties réelles de toutes les valeurs propres de la matrice $A := \mathrm{d}f(0)$ sont strictement négatives. On souhaite montrer qu'au voisinage de 0, $y(t)$ tend exponentiellement vers 0 à l'infini.

1. Conclure dans le cas où l'équation différentielle s'écrit $z' = Az$.
2. On note
$$\begin{array}{rccc} b: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & \displaystyle\int_0^{+\infty} \langle e^{tA}x | e^{tA}y\rangle. \end{array}$$
Montrer que b est un produit scalaire. On note q, sa forme quadratique associée.
3. Soit y, solution maximale du problème. On note $r(y) = f(y) - Ay$. Montrer que
$$q(y)' = -\|y\|^2 + 2b(y, r(y)).$$
4. Montrer que
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall z \in \mathbb{R}^n q(z) \leq \alpha \Longrightarrow \sqrt{q(r(z))} \leq \varepsilon \sqrt{q(z)}.$$
5. Conclure.

Démonstration. 1. On considère donc l'équation différentielle $z' = Az$ avec $z(0) = y_0$. Alors $z(t) = e^{tA}y_0$. Notons $D + N$, la décomposition de Dunford de A. Alors

$$\left|\!\left|\!\left| e^{tA} \right|\!\right|\!\right| \leq \left|\!\left|\!\left| e^{tD}e^{tN} \right|\!\right|\!\right| \leq \left|\!\left|\!\left| e^{tD} \right|\!\right|\!\right| \times \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{|t|^k |\!|\!| N |\!|\!|^k}{k!} \right)}_{=:P(|t|)} \leq \left|\!\left|\!\left| e^{tD} \right|\!\right|\!\right| P(|t|).$$

Soit $a = \min_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} -\Re(\lambda) > 0$. Alors $\left|\!\left|\!\left| e^{tD} \right|\!\right|\!\right| \leq K \|e^{tD}\|_\infty = Ke^{-at}$ par équivalence des normes. On a donc

$$\left|\!\left|\!\left| e^{tA} \right|\!\right|\!\right| \leq Ke^{-at}P(|t|) \underset{t\to+\infty}{=} o_{t\to+\infty}(e^{-at/2}).$$

Ainsi, il existe C positif tel que $\|e^{tA}\| \leq Ce^{-at/2}$.

$$\|z(t)\| \leq \left|\!\left|\!\left| e^{tA} \right|\!\right|\!\right| \|y_0\| \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

CQFD.

2. Par Cauchy-Schwarz,

$$\langle e^{tA}x | e^{tA}y \rangle \leq \|e^{tA}x\| \|e^{tA}y\| \leq C^2 e^{-at} \|x\| \|y\| \in L^1(\mathbb{R}^+).$$

Donc b est bien définie. b hérite clairement de la symétrie et de la positivité. Elle est définie positive puisque si $q(x) = 0$, alors par continuité, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $e^{tA}x = 0$. Donc $x = 0$.

3.
$$q(y)' = 2b(y, y') = 2b(y, Ay) + 2b(y, r(y)).$$

Je conclus en écrivant :

$$\forall x, 2b(x, Ax) = \int_0^{+\infty} 2\langle e^{tA}x | e^{tA}Ax \rangle \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \|e^{tA}x\|^2 = 0 - \|x\|^2.$$

4. Puisque $\sqrt{q}$ est une norme, elle est équivalente à $\|\cdot\|$. De plus,

$$f(z) = f(0) + Az + o(\|z\|),$$

donc $r(z) = o(\|z\|) = o(\sqrt{q(z)})$. Donc par définition,

$$\forall \varepsilon, \exists \eta, \forall z \in \mathbb{R}^n, \sqrt{q(z)} \leq \eta \implies \sqrt{q(r(z))} \leq \varepsilon \sqrt{q(z)}.$$

5. Fixons ε. Alors on prend le η définit ci-dessus pour écrire via Cauchy-Schwarz :

$$\forall z \in \mathbb{R}^n, q(z) \leq \eta^2 \implies |b(z, r(z))| \leq \sqrt{q(z)}\sqrt{q(r(z))} \leq \varepsilon q(z).$$

Donc $q(y)' = -\|y\|^2 - 2\varepsilon q(y) \leq_{\sqrt{q} \leq \gamma \|\cdot\|} -(\gamma - 2\varepsilon)q(z)$. On note β le coefficient devant $q(z)$. Alors β est strictement positif pour ε assez petit. Supposons dorénavant que $q(y_0) \leq \eta^2$. Soit $t_0 > 0$ tel que $q(y(t)) > \eta^2$ pour t dans $]t_0, t_0 + \delta[$ et $q(y(t)) \leq \eta^2$ pour t dans $[0, t_0]$. Alors $q(y(t_0)) = \eta^2$ donc $q(y)'(t_0) \leq -\beta q(y(t_0)) < 0$ ce qui est absurde. Donc $q(y(t)) \leq \eta^2$, et ce, pour tout t dans l'intervalle maximale de solution, donc q est bornée. Par le lemme de sortie de compact, l'intervalle est donc $\mathbb{R}^+$. Donc

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, q(y(t))' \leq -\beta q(y(t))$$

mais $q(y) \leq e^{-\beta t} q(y_0) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$

□