Réduction des endomorphismes normaux

Chen Thomas
t.chen.thomas1[at]gmail.com

16 mai 2024

Attention

1. Ce document contient certainement des coquilles. N'hésitez pas à me le signaler. De même si vous avez une question.
2. Pour les recasages, ce sont les miens mais ce développement se case peut-être ailleurs et je n'y ai pas réfléchi.
3. Il se peut que ce développement dure plus de 15 minutes. J'ai essayé de le découper pour faire des recollements personnalisés.

Leçons

- 106 : Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de $\mathrm{GL}(E)$. Applications.
- 148 : Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.
- 150 : Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.
- 151 : Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.
- 152 : Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.
- 157 : Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.
- 158 : Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie).

Références

[1] J.-E. Rombaldi. *Mathématiques pour l'agrégation : Algèbre & géométrie.* deBoeck Supérieur, 2021.

L'essentiel est dans [1].

Lemme 1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ normal, F sous-espace vectoriel de E stable par u. Alors u stabilise $F^\perp$, u^* stabilise F et u_F est normal.

Démonstration. Si F est $\{0\}$ ou E, il n'y a rien à faire. Soit donc F un sous-espace vectoriel non trivial de E. Alors $E = F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp$. Soit $\mathcal{B}_F$ base de F. En considérant une base $\mathcal{B}_{F^\perp}$ de $F^\perp$ et en les concaténant, on obtient une base $\mathcal{B}$ de E. Alors

$$M := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

avec $A \in \mathcal{M}_{\dim(F)}(\mathbb{R})$. Mais M est alors normal donc par produit par blocs,

$$M^T M = \begin{pmatrix} A^T & 0 \\ B^T & C^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^T A & * \\ * & B^T B + C^T C \end{pmatrix}$$

et

$$MM^T = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^T & 0 \\ B^T & C^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA^T + BB^T & * \\ * & CC^T \end{pmatrix}.$$

Ainsi, on a $A^T A = AA^T + BB^T$. En prenant la trace, puisque $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$, on a $\mathrm{tr}(BB^T)$ donc $B = 0$ [1]. Ainsi,

$$M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

donc $u(F^\perp) \subset F^\perp$: $F^\perp$ est stable par u. De plus, $A^T A = AA^T$ donc A est normal et puisque A vaut $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(u_F)$ (par stabilité de F par u, u_F est normal. $C^T C = CC^T$ et puisqu'on a finalement montré que $F^\perp$ est stable par u, on a $C = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_{F^\perp}}(u_{F^\perp})$ donc $u_{F^\perp}$ est normal. □

Théorème 2. *Soit E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ normal. Alors il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ vérifiant*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & & & \\ & \lambda_2 & & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & & \\ & & & \lambda_r & & & & & & \\ & & & & a_1 & -b_1 & & & & \\ & & & & b_1 & a_1 & & & & \\ & & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & & & a_s & -b_s \\ & & & & & & & & b_s & a_s \end{pmatrix}$$

où $r + 2s = n$ avec $r, s \in \mathbb{N}$ et $\lambda_1, \cdots, \lambda_r, a_1, \cdots, a_s, b_1, \cdots, b_s$ des réels.

Démonstration. On fait une récurrence sur la dimension de E.

- Si E est de dimension 1, il n'y a rien à faire.
- Soit E de dimension 2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ normal.
  - Si u admet une valeur propre réelle, soit x un vecteur propre que l'on prend unitaire, quitte à diviser par sa norme. Alors $x^\perp$ est une droite, disons engendré par un vecteur unitaire y. $\mathbb{R}y$ est stable par u en vertu du lemme donc u admet deux droites stables distinctes qui sont $\mathbb{R}x$ et $\mathbb{R}y$: u est diagonalisable et (x, y) forme une base orthonormée de E donc u est diagonalisable en base orthonormée.
  - Sinon, soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée et $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. M est normale donc $M^T M = MM^T$ et on obtient en identifiant les coefficients $a^2 + b^2 = a^2 + c^2$ et $ab + cd = ac + bd$. Si $b = 0$, u admet des valeurs propres ce qui est exclu. Si $b = c$ [2], $\chi_u = X^2 - (a+d)X + ad - b^2$ de discriminant $(a+d)^2 - 4(ad - b^2) = (a+d)^2 + 4b^2 \geq 0$ donc u admet des valeurs propres ce qui est exclu. Donc $b = -c$ et nécessairement $a = d$. Ainsi, $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.
- Supposons le résultat acquis jusqu'au rang $n - 1$ pour $n \geq 3$ et montrons le résultat au rang n. Soit donc E de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$.
  - Si u admet une valeur propre réelle λ, soit e_1 un vecteur propre unitaire associé à cette valeur propre pour u. Alors $(\mathbb{R}e_1)^\perp$ est un espace euclidien de dimension $n-1$ et puisque u est normal et stabilise $(\mathbb{R}e_1)$, il stabilise $(\mathbb{R}e_1)^\perp$ et $u_{(\mathbb{R}e_1)^\perp}$ est normal en vertu du lemme : on applique alors l'hypothèse de récurrence au rang $n-1$: on obtient alors une base orthonormale de $(\mathbb{R}e_1)^\perp$ notée $\mathcal{B}_1$ où $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(u)$ a la forme voulue : alors la concaténation $\mathcal{B}$ entre $\{e_1\}$ et $\mathcal{B}_1$ fournit une base orthonormée de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ a la forme voulue.

1. on rappelle que $(A, B) \mapsto \mathrm{tr}(AB^T)$ désigne le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
2. Il est important de souligner qu'on ne veut pas utiliser le théorème spectral. En effet, un corollaire important de ce théorème est justement le théorème spectral.

- Si u n'admet pas de valeur propre réelle, considérons μ_u son polynôme minimal. μ_u n'admet pas de racines réelles – car sinon u admettrait une valeur propre réelle – donc on peut considérer $X^2+aX+b=:P$ un facteur irréductible de μ_u et $N=\ker(P(u))$. Alors $N \neq \{0\}$ [3] donc considérons $x \in N$ et montrons que $\mathcal{P}=\mathrm{Vect}(x,u(x))$ est un plan stable par u. Déjà, x et $u(x)$ forment une famille libre puisque x n'est pas vecteur propre pour u. $u^2(x)=-au(x)-bx$ donc $\mathcal{P}$ est bien stable par u. $u_{\mathcal{P}}$ est normal donc il existe (e_1,e_2) une base orthonormée telle que
$$\mathrm{Mat}_{(e_1,e_2)}(u_{\mathcal{P}}) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$
$u_{\mathcal{P}^\perp}$ est aussi normal d'après le lemme donc par hypothèse de récurrence, il existe une base orthonormée $\mathcal{B}_2$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2}(u_{\mathcal{P}})$ a la forme voulue. On conclut en concaténant les bases.

Par principe de récurrence, on a le résultat voulu. □

Théorème 3. *Soit E un espace euclidien et u autoadjoint dans $\mathcal{L}(E)$. Alors u est diagonalisable en base orthonormée.*

Démonstration. Un endomorphisme autoadjoint est bien entendu normal. Il existe alors une base $\mathcal{B}$ orthonormée telle que
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 &&&&&&&& \\ & \lambda_2 &&&&&&& \\ && \ddots &&&&&& \\ &&& \lambda_r &&&&& \\ &&&& a_1 & -b_1 &&& \\ &&&& b_1 & a_1 &&& \\ &&&&&& \ddots && \\ &&&&&&& a_s & -b_s \\ &&&&&&& b_s & a_s \end{pmatrix}$$
Or, u est autoadjoint donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)^T = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ et donc $b_i=-b_i$ pour tout $1 \leq i \leq s$. Autrement dit, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est diagonal. □

3. en notant $\mu_u = PQ$, on a $0 = P(u)Q(u)$ avec $Q(u) \neq 0$ (par minimalité du polynôme minimal) donc $P(u)$ ne peut être injectif