Critère de nilpotence par la trace

Chen Thomas
t.chen.thomas1[at]gmail.com

16 mai 2024

Attention

1. Ce document contient certainement des coquilles. N'hésitez pas à me le signaler. De même si vous avez une question.
2. Pour les recasages, ce sont les miens mais ce développement se case peut-être ailleurs et je n'y ai pas réfléchi.
3. Il se peut que ce développement dure plus de 15 minutes. J'ai essayé de le découper pour faire des recollements personnalisés.

Leçons

- 156 : Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.
- 162 : Systèmes d'équations linéaires ; opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.

Références

[1] P. Caldero, M. Peronnier. *Carnet de voyage en Algébrie.* Calvage & Mounet, 2022.

Tout est dans [1].

Théorème 1. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathbb{C}$. Alors A est nilpotente si, et seulement si, $\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathrm{Tr}(A^k) = 0$. On redémontre que A est semblable à une matrice de $\mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{C})$.*

Démonstration. $\boxed{\Longrightarrow}$: Puisque A est nilpotente, en notant p, l'indice de nilpotence de A, on a $A^p = 0$ donc μ_A est une puissance de X. A étant trigonalisable par d'Alembert-Gauss, les valeurs propres de A sont toutes nulles donc A est semblable à une matrice triangulaire stricte.

$\boxed{\Longleftarrow}$: A est trigonalisable par d'Alembert-Gauss : soit $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ les valeurs propres non nulles de A de multiplicités respectives $m_1, \cdots, m_r$. A est alors semblable à une matrice triangulaire de diagonale $(0, \cdots, 0, \lambda_1, \cdots, \lambda_1, \cdots, \lambda_r, \cdots, \lambda_r)$. Soit $k \in \mathbb{N}$ – a priori, il se peut qu'il n'y ait pas de 0 –. Alors A^k est semblable à une matrice triangulaire de diagonale $(0, \cdots, 0, \lambda_1^k, \cdots, \lambda_1^k, \cdots, \lambda_r^k, \cdots, \lambda_r^k)$. Par hypothèse, on a donc

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{r} m_i \lambda_i = 0 \ ; \ \cdots \ ; \ \mathrm{Tr}(A^k) = \sum_{i=1}^{r} m_i \lambda_i^k \ ; \ \cdots .$$

Cela se traduit en le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} \lambda_1 m_1 & + & \lambda_2 m_2 & + & \cdots & + & \lambda_r m_r & = & 0 \\ \lambda_1^2 m_1 & + & \lambda_2^2 m_2 & + & \cdots & + & \lambda_r^2 m_r & = & 0 \\ \vdots & + & \vdots & + & & + & \vdots & = & \vdots \\ \lambda_1^r m_1 & + & \lambda_2^r m_2 & + & \cdots & + & \lambda_r^r m_r & = & 0 \end{array}\right.$$

et matriciellement en

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_r \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_r^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^r & \lambda_2^r & \cdots & \lambda_r^r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_r \end{pmatrix} = 0$$

Tous les $\lambda_i, 1 \leq i \leq r$ sont non nuls donc

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_r \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_r^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^r & \lambda_2^r & \cdots & \lambda_r^r \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{r} \lambda_i \begin{vmatrix} 1 & \lambda_2 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_r \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{r-1} & \lambda_2^{r-1} & \cdots & \lambda_r^{r-1} \end{vmatrix} = V(\lambda_1, \cdots, \lambda_r) \prod_{i=1}^{r} \lambda_i = \prod_{1 \leq p < q \leq r} (\lambda_q - \lambda_p) \prod_{i=1}^{r} \lambda_i \neq 0.$$

Ainsi, on a $(m_1, \cdots, m_r) = 0$ ce qui n'est pas. Ainsi, si ce n'est 0, A n'a pas de valeur propre. Donc A est semblable à une matrice triangulaire stricte : A est nilpotente. $\square$

Remarque 2. Dans cette preuve, il suffisant d'avoir un r suffisamment grand mais ce r est inférieur à n !

***Proposition* 3.** Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A + \mu B$ soit nilpotente pour au moins $(n+1)$ valeurs de $\mu \in \mathbb{C}$. Alors A et B sont nilpotentes et toute matrice de $\text{Vect}(A, B)$ est nilpotente.

Démonstration. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Alors par le critère précédent, $\text{tr}((A + \mu B)^k) = 0$. Soit alors $P_k : \mu \mapsto \text{tr}((A + \mu B)^k)$. P_k est une fonction polynômiale en μ et puisque $\mathbb{C}$ est infini, on peut considérer le polynôme P_k. Ce polynôme est de degré n. Or,

$$(A + \mu B)^k = A^k + \mu^k B^k + \sum_{j=1}^{k-1} \mu^j C_j$$

où C_j désigne un produit de matrice de A et de B : C_j désigne la somme sur les parties J de $\{0, 1\}^k$ qui contiennent j fois « 1 » du produit $\prod_{j \in J} E_j$ où $E_j = A$ si $j = 0$, B sinon. Ainsi, on considérant la trace, P_k admet pour coefficient dominant $\text{tr}(B^k)$ et comme coefficient constant $\text{tr}(A^k)$. P_k s'annule $n+1$ fois et est de degré au plus $k \leq n$: P_k est donc nul ce qui donne $\text{tr}(A^k) = \text{tr}(B^k) = 0$ et ceci est vrai pour tout $k \in [\![1, n]\!]$. Par le critère précédent, A et B sont nilpotentes.

Maintenant, pour tout $\mu \in \mathbb{C}, \mu B$ est nilpotente. Si on se donne $\lambda A + \mu B$ une combinaison linéaire de A et B avec $\lambda \neq 0$, on a $\lambda(A + \mu/\lambda B)$. Ainsi, pour tout $k \in [\![1, n]\!], \text{tr}((\lambda(A + \mu/\lambda B)^k)) = \lambda^k P_k(\mu/\lambda) = 0$. Par le critère de nilpotence, $\lambda A + \mu B$ est nilpotente. $\square$