Théorème de réduction de Jordan par la dualité

Chen Thomas
t.chen.thomas1[at]gmail.com

16 mai 2024

Attention

1. Ce document contient certainement des coquilles. N'hésitez pas à me le signaler. De même si vous avez une question.
2. Pour les recasages, ce sont les miens mais ce développement se case peut-être ailleurs et je n'y ai pas réfléchi.
3. Il se peut que ce développement dure plus de 15 minutes. J'ai essayé de le découper pour faire des recollements personnalisés.

Leçons

- 148 : Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.
- 159 : Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications.

Références

[1] J.-E. Rombaldi. *Mathématiques pour l'agrégation : Algèbre & géométrie.* deBoeck Supérieur, 2021.

Tout est dans [1]

Lemme 1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'ordre $q \geq 1$. Soit $x \in E, x \notin \ker(u^{q-1})$. La famille $B_{u,x} = (u^k(x))_{0 \leq k \leq q-1}$ est libre et $F = \mathrm{Vect}(B_{u,x})$ est stable par u.

Démonstration. Puisque $u^{q-1} \neq 0$, il existe $x \in E \setminus \ker(u^{q-1})$. Soit $(\lambda_k)_{0 \leq k \leq n}$ tel que $\sum_{k=0}^{q-1} \lambda_k u^k(x) = 0$. Soit $A = \{k \in [\![0, q-1]\!] : \lambda_k \neq 0\}$. A est une partie bornée de $\mathbb{N}$. Supposons que A est non vide. A admet alors un plus grand élément, disons n_0. Alors $\forall k < n_0, \lambda_k = 0$ donc

$$0 = \sum_{k=n_0}^{q-1} \lambda_k u^k(x).$$

On compose par u^{q-1-n_0}. Alors $\lambda_{n_0} u^{q-1}(x) = 0$ donc $\lambda_{n_0} = 0$. Absurde. Donc A est vide et $B_{u,x}$ est libre. La stabilité est immédiate étant donné que $u(u^k(x)) \in B_{u,x}$ par construction. □

Lemme 2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotente d'indice q. Il existe $q \in E^*$ et $x \in E$ tel que $F = \mathrm{Vect}((u^k(x))_{0 \leq k \leq q-1})$ et $G = H^\circ$ avec $H = \mathrm{Vect}(({}^t u)^k(\varphi))_{0 \leq k \leq q-1})$ stables par u avec $E = F \oplus G$.

Démonstration. Notons $G = \{y \in E : \forall \varphi \in H, \varphi(y) = 0\}$. Alors $\dim(E) = \dim(G) + \dim(H)$. Si H est stable par ${}^t u$, G est stable par u [1]. ${}^t u$ est nilpotente d'indice q donc $u^{q-1} \neq 0$. Ainsi, il existe $\varphi \in E^*$ tel que $({}^t u)^{q-1}(\varphi) \neq 0$ c'est-à-dire $\varphi \circ u^{q-1} \neq 0$. Soit donc x tel que $\varphi \circ u^{q-1}(x) \neq 0$. Alors nécessairement $u^{q-1}(x) \neq 0$ donc par deux fois le lemme, on peut construire F et G tel que $\dim(F) = \dim(H) = q$, F étant stable par u et H stable par ${}^t u$ donc G stable par u.

On a $\dim(F) + \dim(G) = \dim(H) + \dim(G) = n$ donc il suffit d'avoir $F \cap G = \{0\}$ pour obtenir le résultat. Soit donc $y \in F \cap G$. Alors $y = \sum_{k=0}^{q-1} \lambda_k u^k(x)$. Soit $A = \{k \in [\![1, q-1]\!] : \lambda_k \neq 0\}$. A est une partie bornée de $\mathbb{N}$. Supposons que A est non vide. A admet alors un plus grand élément, disons n_0. Alors $\forall k < n_0, \lambda_k = 0$ donc

$$y = \sum_{k=n_0}^{q-1} \lambda_k u^k(x).$$

On a $u^{q-1-n_0}(y) \in G$ donc pour le φ précédent, on a

$$\lambda_{n_0} \varphi(u^{q-1-n_0}(x)) = \varphi(u^{q-1-n_0}(y)) = 0$$

donc $\lambda_{n_0} = 0$ ce qui est absurde. Donc A est vide et $y = 0$. □

Théorème 3. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice q. Alors il existe $B = \biguplus_{i=1}^{r} B_i$ concaténation de bases avec $E_i = \mathrm{Vect}(B_i)$ tel que*

1. *E_i est stable par u pour tout $i \in [\![1, r]\!]$,*
2. *$u_{E_i} =: u_i$ est tel que $\mathrm{Mat}_{B_i}(u_i) = J_i(0)$ [2].*

Démonstration. On procède par récurrence sur la dimension de E, le cas $n = 1$ étant immédiat car $u = 0$.

Supposons le résultat acquis pour $k < n$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice q avec $\dim(E) = n$. Soit $\varphi \in E^*, x \in E, F, G$ comme dans le lemme. Notons $B_1 = B_{u,x}$. Alors

$$\mathrm{Mat}_{B_1}(u_F) = J_q(0)$$

avec $q = \dim(E_1)$. Si $q = n$, c'est bon. Sinon, soit B_2 base de G et $B = B_1 \uplus B_2$. Alors par stabilité de F et G par u, on a

$$\mathrm{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} \mathrm{Mat}_{B_1}(u_F) & 0 \\ 0 & \mathrm{Mat}_{B_2}(u_G) \end{pmatrix}.$$

Or, $\mathrm{Mat}_{B_2}(u_G)$ est une matrice nilpotente d'indice au plus q et $\dim B_2 < n$. Par récurrence, on peut décomposer la base B de sorte que $\mathrm{Mat}_{B_2}(u_G)$ a la forme voulue.

Finalement, la matrice dans la base B a la forme voulue.

□

1. En effet, $\forall y \in G, \forall \varphi \in H, \varphi(u(y)) = ({}^t u)(\varphi(y)) = 0$ donc $u(G) \subset G$.
2. matrice nulle avec une sous-diagonale de 1 de taille $i \times i$