Décomposition de Dunford, calcul de l'exponentielle matricielle

Chen Thomas
t.chen.thomas1[at]gmail.com

16 mai 2024

Attention

1. Ce document contient certainement des coquilles. N'hésitez pas à me le signaler. De même si vous avez une question.
2. Pour les recasages, ce sont les miens mais ce développement se case peut-être ailleurs et je n'y ai pas réfléchi.
3. Il se peut que ce développement dure plus de 15 minutes. J'ai essayé de le découper pour faire des recollements personnalisés.

Leçons

- 150 : Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.
- 151 : Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.
- 154 : Exemples de décompositions de matrices. Applications.
- 155 : Exponentielle de matrices. Applications.
- 156 : Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.

Références

[1] X. Gourdon. *Algèbre et Probabilités.* Ellipses, 2021.

Théorème 1. *[1] Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. On suppose que χ_f est scindé. Il existe alors un unique couple $(d, n) \in \mathcal{L}(E)^2$ vérifiant*

1. $f = d + n$,
2. *d est diagonalisable,*
3. *n est nilpotente,*
4. $dn = nd$.

De plus, d et n sont des polynômes en f.

Etape 1 : idée de la preuve. La suite est purement formelle et donne l'idée de la preuve. Essentiellement, étant nilpotente, le spectre de n est réduit à 0 : n « ne contribue pas » au spectre de f donc d contient les valeurs propres de f. Puisque d est diagonalisable, en notant $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$, racines de χ_f (on rappelle que χ_f est scindé), d est semblable à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} \boxed{\lambda_1 I_{m_1}} & & & \\ & \boxed{\lambda_2 I_{m_2}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{\lambda_r I_{m_r}} \end{pmatrix}$$

Chaque bloc est naturellement « associé » à son espace caractéristique N_i. Etant en somme directe par le lemme des noyaux, il suffit d'écrire $d = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i p_i$ où p_i est un projecteur sur N_i parallèlement à la somme directe des autres. On prendra alors $n = f - d$ pour conclure.

Etape 2 : Construction des projecteurs, et propriétés immédiates. Notons $(\lambda_1, \cdots, \lambda_d)$, les racines distinctes de χ_f. Considérons $N_i := \ker(f - \lambda_i)^{m_i}$ où m_i est la multiplicité de λ_i dans χ_f. Ce sont les espaces caractéristiques de f. Par le lemme des noyaux, $(X - \lambda_i)^{m_i})_{1 \leq i \leq d}$ étant deux à deux premiers entre eux, on a

$$\bigoplus_{i=1}^{r} N_i = \ker(\chi_f(f)) = E$$

(on rappelle que par Caylay-Hamilton, $\ker(\chi_f(f)) = E$). Notons dorénavant Q_i, quotient de χ_f par $(X - \lambda_i)^{m_i}$. Alors les $(Q_i)_{1 \leq i \leq r}$ sont deux à deux premiers entre eux : par le théorème de Bézout, il existe $U_1, \cdots, U_r \in \mathbb{K}[X]$ vérifiant

$$\sum_{i=1}^{r} U_i Q_i = 1.$$

Ainsi,

$$\sum_{i=1}^{r} U_i(f) \circ Q_i(f) = \mathrm{Id}. \tag{1}$$

Posons alors $p_i = U_i(f) \circ Q_i(f)$ pour $1 \leq i \leq r$. Montrons que

a) $\sum_{i=1}^{r} p_i = \mathrm{Id}$ b) $\forall 1 \leq i \leq r, p_i \in \mathbb{K}[f]$ c) $\forall i \neq j, p_i p_j = 0$

d) $\forall 1 \leq i \leq r, p_i^2 = p_i$. e) $\forall 1 \leq i \leq r, \mathrm{Im}(p_i) = N_i$. f) $\forall 1 \leq i \leq r, \ker(p_i) = \bigoplus_{j \neq i} N_j$.

a) C'est en fait l'égalité 1.

b) Soit $1 \leq i \leq r$. Par construction de p_i, c'est un polynôme en f.

c) Soit $1 \leq i \neq j \leq r$. Alors en remarquant que $\chi_f | Q_i Q_j$, puisque $U_i(f), Q_i(f), U_j(f), Q_j(f)$ sont des polynômes en f, ils commutent et

$$p_i p_j = U_i(f) Q_i(f) U_j(f) Q_j(f) = Q_i(f) Q_j(f) U_i(f) U_j(f) = 0$$

par le théorème de Caylay-Hamilton.

d) Soit $1 \leq i \leq r$. Alors $p_i^2 = p_i \left(\mathrm{Id} - \sum_{j \neq i} p_j \right) = p_i - \sum_{j \neq i} p_i p_j = p_i$.

e) Soit $1 \leq i \leq r$. Montrons le résultat par double inclusion.
$\boxed{\subset}$: Soit $x \in E, y = p_i(x)$. Alors $(f - \lambda_i)^{m_i}(y) = (f - \lambda_i)^{m_i} U_i(f) Q_i(f)(x) = U_i(f) \chi_f(f)(x) = 0$. Donc $y \in N_i$.
$\boxed{\supset}$: Soit $x \in N_i$. Alors par 1, $x = \sum_{j=1}^{n} U_j(f) \circ Q_j(f)(x) = U_i(f) \circ Q_i(f)(x)$ car pour tout $j \neq i$, $(X - \lambda_i)^{m_i} | Q_j$ ce qui donne $\forall j \neq i, N_i \subset \ker(Q_j(f))$.

f) Soit $1 \leq i \leq d$. Montrons le résultat par double inclusion.
$\boxed{\subset}$: Soit $x \in \ker(p_i)$. Alors toujours par 1, $x = \sum_{j \neq i} p_j(x) + \underbrace{p_i(x)}_{=0} \in \bigoplus_{j \neq i} N_j$.
$\boxed{\subset}$: Soit $x \in \bigoplus_{j \neq i} N_j$. Alors $p_i(x) = U_i(f) \circ Q_i(f)(x)$. Mais pour tout $j \neq i, N_j \subset \ker(Q_i(f))$ puisque $(X - \lambda_j)^{m_j} | Q_i$ pour tout $j \neq i$.

Etape 3 : Preuve de l'existence. On pose $d = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i p_i$. Alors d est par construction diagonalisable et est un polynôme en f. Posons $n = f - d$. Alors n est un polynôme en f donc commutent avec d. Par construction, $f = d + n$. Il suffit donc de montrer que n est nilpotente. Pour cela, on écrit

$$n = f - d = \sum_{i=1}^{d} f p_i - \sum_{i=1}^{d} \lambda_i p_i = \sum_{i=1}^{d} (f - \lambda_i \mathrm{Id}) p_i.$$

Puisque $p_i p_j = 0$, une récurrence immédiate montre que

$$\forall k \in \mathbb{N}, n^k = \sum_{i=1}^{d} (f - \lambda_i \mathrm{Id})^k p_i.$$

Pour $k = \max(m_1, \cdots, m_d)$, on en déduit donc que $n^k = 0$ donc n est nilpotente.

Etape 4 : Unicité. Considérons d, n, les endomorphismes montrés précédemment. Soit d', n', d'autres endomorphismes vérifiant les propriétés $1, 2, 3, 4$ du théorème. Alors $f = d' + n'$ et d, n sont des polynômes en f. De fait, comme n' commute avec f – provient de $n'd' = d'n'$ et $f = d' + n'$, n' commute avec n, d' commute avec d. Ainsi, $n - n'$ est nilpotente par la formule du binôme et $d' - d$ est diagonalisable car d, d' sont codiagonalisables. Puisque $u = d + n = d' + n'$, on a donc $d' - d = n - n'$ donc $d' - d$ est diagonalisable et nilpotente : elle est nulle. Donc $d = d'$ et $n = n'$.

Etape 5 : Application à l'exponentielle. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Alors A s'écrit $D + N$ avec D diagonalisable et N nilpotente et $DN = ND$. Soit $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ les valeurs propres de A (donc de D). Alors il existe P inversible tel que

$$D = P \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) P^{-1}$$

donc

$$\exp(D) = P \mathrm{diag}(e^{\lambda_1}, \cdots, e^{\lambda_n}) P^{-1}.$$

N étant nilpotente, $N^n = 0$ donc

$$\exp(N) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} N^k.$$

Ainsi,

$$\exp(A) = \exp(D + N) \underset{DN=ND}{=} \exp(D) \exp(N) = P \mathrm{diag}(e^{\lambda_1}, \cdots, e^{\lambda_n}) P^{-1} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} N^k \right).$$