Déterminant de Gram et inégalité de Hadamard

Chen Thomas
t.chen.thomas1[at]gmail.com

16 mai 2024

Attention

1. Ce document contient certainement des coquilles. N'hésitez pas à me le signaler. De même si vous avez une question.
2. Pour les recasages, ce sont les miens mais ce développement se case peut-être ailleurs et je n'y ai pas réfléchi.
3. Il se peut que ce développement dure plus de 15 minutes. J'ai essayé de le découper pour faire des recollements personnalisés.

Leçons

- 149 : Déterminant. Exemples et applications.
- 161 : Espaces vectoriels et espaces affines euclidiens : distances, isométries.
- 191 : Exemples d'utilisation de techniques d'algèbre en géométrie.

Références

[1] X. Gourdon. *Algèbre et Probabilités.* Ellipses, 2021.

Tout est dans [1].

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel et $(x_1, \cdots, x_n)$ n vecteurs de E. On note $G(x_1, \cdots, x_n)$ la matrice de Gram associée *i.e.* $[G(x_1, \cdots, x_n)]_{ij} = \langle x_i, x_j \rangle$.

***Proposition* 1.** $G(x_1, \cdots, x_n)$ est une matrice symétrique positive de rang égal à $\mathrm{rg}(x_1, \cdots, x_n)$.

Démonstration. Par symétrie du produit scalaire, la matrice est symétrique. Ensuite, en notant $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a

$$\Lambda^T G(x_1, \cdots, x_n) \Lambda = \sum_{1 \leq i,j \leq n} \langle x_i, x_j \rangle \lambda_i \lambda_j = \left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \right\|^2 \geq 0.$$

Soit $F = \mathrm{Vect}(x_1, \cdots, x_n)$ et $u : x \in F \mapsto (\langle x, x_i \rangle)_{1 \leq i \leq n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Alors u est injective et linéaire donc le rang est d'une famille de F est invariante par composition par u. □

***Proposition* 2.** Soit F un sous-espace vectoriel de E et $(x_1, \cdots, x_n)$ une base de F. Alors

$$\forall x \in E, (d(x, F))^2 = \frac{\det(G(x, x_1, \cdots, x_n))}{\det(G(x_1, \cdots, x_n))}.$$

Démonstration. Soit $x \in E$. F étant de dimension finie, $E = F \oplus F^{\perp}$ donc soit $(y, h) \in F \times F^{\perp}$ tel que $x = y + h$. Alors
$$(d(x, F))^2 = \|x - \pi_F(x)\|^2 = \|h\|^2.$$
Or,
$$\langle x, x\rangle = \|y\|^2 + \|h\|^2$$
et
$$\langle x, x_i\rangle = \langle y, x_i\rangle$$
de sorte que la première colonne vaut
$$\begin{pmatrix} \|h\|^2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \|y\|^2 \\ \langle y, x_1\rangle \\ \vdots \\ \langle y, x_n\rangle \end{pmatrix}.$$
Ceci étant, par linéarité, on a
$$\det(G(x, x_1, \cdots, x_n)) = \begin{vmatrix} \|h\|^2 & * \\ 0 & G(x_1, \cdots, x_n) \end{vmatrix} + \det(G(y, x_1, \cdots, x_n)).$$
Par le point précédent, puisque $y \in \mathrm{Vect}(x_1, \cdots, x_n) = F$, on en déduit que le second déterminant est nul. Par développement selon la première colonne, on a le résultat voulu. □

***Proposition* 3.**

1. $\det(G(x_1, \cdots, x_n)) \leq \displaystyle\prod_{i=1}^{n} \|x_i\|^2$.
2. Si on se donne $x_1, \cdots, x_n$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n$, on a $|\det(x_1, \cdots, x_n)| \leq \displaystyle\prod_{i=1}^{n} \|x_i\|_2$ où $\|\cdot\|_2$ désigne la norme euclidienne standard de $\mathbb{R}^n$.
3. Les cas d'égalités dans les deux cas sont lorsque $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ est orthogonale ou contient un vecteur nul.

Démonstration. Si la famille est liée – par exemple en contenant 0 –, il n'a rien à faire. Montrons par récurrence H_n : pour tout $(x_1, \cdots, x_n)$ famille libre de E, $\det(G(x_1, \cdots, x_n)) \leq \displaystyle\prod_{i=1}^{n} \|x_i\|^2$ avec égalité si, et seulement si, la famille est orthogonale.

- Pour $n = 1$, c'est clair.
- Supposons le résultat acquis au rang n. Soit $(x_1, \cdots, x_{n+1})$ une famille libre et on note F le sous-espace vectoriel engendré par $(x_1, \cdots, x_n)$. Par la proposition précédente,
$$\begin{aligned} \det(G(x_1, \cdots, x_{n+1}) &= \det(G(x_1, \cdots, x_n))\|x_{n+1} - \pi_F(x_{n+1})\|^2 \\ &\leq \prod_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 \|x_{n+1} - \pi_F(x_{n+1})\|^2 \\ &\leq \prod_{i=1}^{n+1} \|x_i\|^2 \end{aligned}$$
puisque $\|x_{n+1} - \pi_F(x_{n+1})\|^2 = \|x_{n+1}\|^2 - \|\pi_F(x_{n+1})\|^2 \leq \|x_{n+1}\|^2$. Il y a égalité dans la première inégalité si, et seulement si $(x_1, \cdots, x_n)$ est orthogonale. Il y a égalité dans la deuxième si, et seulement si, $\|\pi_F(x_{n+1})\|^2 = 0$ ce qui signifie que $x_{n+1} \in F^{\perp}$. On a donc montré H_{n+1}.

Par principe de récurrence, on a le premier point. En notant M la matrice de vecteurs colonnes les $(x_i)_i$ on a $G(x_1, \cdots, x_n) = M^T M$ et $\det(M^T) = \det(M)$ ce qui conclut. □