Densité des matrices diagonalisables. Cayley-Hamilton

Chen Thomas
t.chen.thomas1[at]gmail.com

16 mai 2024

Attention

1. Ce document contient certainement des coquilles. N'hésitez pas à me le signaler. De même si vous avez une question.
2. Pour les recasages, ce sont les miens mais ce développement se case peut-être ailleurs et je n'y ai pas réfléchi.
3. Il se peut que ce développement dure plus de 15 minutes. J'ai essayé de le découper pour faire des recollements personnalisés.

Leçons

- 152 : Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.

Références

[1] C. Deschamps, F. Moulin, etc. *Maths Tout-en-un MP/MP*-MPI/MPI**. Dunod, 2022.

[2] P. Caldero, M. Peronnier. *Carnet de voyage en Algébrie*. Calvage & Mounet, 2022.

On note $\mathrm{DZ}_n(\mathbb{K})$ (resp. $\mathrm{TZ}_n(\mathbb{K})$) l'ensemble des matrices diagonalisables (resp. trigonalisables) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Théorème 1. *[1] On a*

1. $\mathrm{DZ}_n(\mathbb{C})$ *dense dans* $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
2. $\overline{\mathrm{DZ}_n(\mathbb{R})} = \mathrm{TZ}_n(\mathbb{R})$.

Démonstration. 1. Il suffit d'utiliser le lemme suivant :

$$\forall (a_1, \cdots, a_k) \in \mathbb{C}^k, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \forall i \neq j, a_i + \frac{i}{n} \neq a_j + \frac{j}{n}.$$

Démonstration. Considérons a_i, a_j quelconque, $i \neq j$. Si $a_i = a_j$, alors $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_i + \dfrac{i}{n} \neq a_j + \dfrac{j}{n}$. Si $a_i \neq a_j$, puisque $\mathbb{R}$ est séparé, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(a_i, \varepsilon) \cap B(a_j, \varepsilon) = \emptyset$. Puisqu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ vérifiant $\forall n \geq n_0, i/n \leq \varepsilon \wedge j/n \leq \varepsilon$, alors $\forall n \geq n_0 + 1, a_i + \dfrac{i}{n} \neq a_j + \dfrac{j}{n}$. Le n_0 dépend de i, j. Puisqu'il y a un nombre fini de i, j, il y a un nombre fini de n_0 candidats : on prend le plus grand. □

Maintenant, considérons $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Alors A est trigonalisable donc il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $A = PTP^{-1}$ avec T, une matrice triangulaire supérieure de la diagonale $\mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$. Pour tout $p \in \mathbb{N}_{p \geq n_0}$, on note $T_p = T + \mathrm{diag}(1/p, 2/p, \cdots, n/p)$. Alors T_p est diagonalisable car son polynôme caractéristique est scindé à racines simples par le lemme. Donc $A_p = PT_pP^{-1}$ est diagonalisable, et ce, pour tout $p \geq n_0$. Puisque $M \mapsto PMP^{-1}$ est continue et que $T_p \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} T$, on en déduit que $A_p \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} A$. Donc A est bien limite de matrices diagonalisables.

2. Par précédent, on montre que $\overline{\mathrm{DZ}_n(\mathbb{R})} \subset \mathrm{TZ}_n(\mathbb{R})$. Pour conclure, il suffit d'avoir $\mathrm{TZ}_n(\mathbb{R})$ fermé, ce que l'on va montrer par caractérisation séquentielle.

   Soit $(A_p)_p$, une suite d'éléments de T convergente, disons vers A. On plonge A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et on trigonalise. Il suffit de montrer que les valeurs propres complexes de A sont en fait réelles. A sera ensuite trigonalisable. On remarque que

$$\forall \lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A), \chi_{A_p}(\lambda) = \det(\lambda I_n - A_p) \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} \chi_A(\lambda) = 0$$

   par continuité du déterminant. Fixons $p \in \mathbb{N}$ et $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$. En notant $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ les valeurs propres de A_p (qui sont réelles),

$$|\chi_{A_p}(\lambda)| = \prod_{i=1}^{n} |\lambda - \lambda_i| = \prod_{i=1}^{n} |\Re(\lambda) - \lambda_i + i\Im(\lambda)| \geq \prod_{i=1}^{n} \Im(\lambda) = \Im(\lambda)^n.$$

   On a donc $|\chi_{A_p}(\lambda)| \geq \Im(\lambda)^n$ et ceci tient pour tout $p \in \mathbb{N}$. L'inégalité passe donc à la limite et on a $\Im(\lambda) = 0$ ce qui donne $\lambda \in \mathbb{R}$. Ainsi, $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \mathbb{R}$ et A est trigonalisable donc χ_A est scindé dans $\mathbb{R}$: A est trigonalisable.

□

***Corollaire* 2** (Cayley-Hamilton)**.** [2] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Alors $\chi_A(A) = 0$.

Démonstration. Soit l'application

$$\psi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{C} & \to & \mathbb{C}[X] \times \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ A & \mapsto & \begin{array}{ccc} (\chi_A, A) & \to & \chi_A(A) \\ (P, M) & \mapsto & P(M) \end{array} \end{array}.$$

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), M = \lim\limits_{r \to +\infty} D_n$. Alors

$$\chi_M(M) = \psi(M) = \psi(\lim_{r \to +\infty} D_r) = \lim_{r \to +\infty} \psi(D_r) = \lim_{r \to +\infty} \chi_{D_r}(D_r).$$

Soit D, diagonalisable. Soit $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, ses valeurs propres. Alors $\chi_D(D) = \prod\limits_{i=1}^{n}(D - \lambda_i I_n)$. En évaluant cet endomorphisme en les vecteurs propres, $\chi_D(D)$ coïncident avec 0 sur une base. D'où le résultat. □