# Cotrigonalisation

Chen Thomas
t.chen.thomas1[at]gmail.com

16 mai 2024

## Attention

1. Ce document contient certainement des coquilles. N'hésitez pas à me le signaler. De même si vous avez une question.
2. Pour les recasages, ce sont les miens mais ce développement se case peut-être ailleurs et je n'y ai pas réfléchi.
3. Il se peut que ce développement dure plus de 15 minutes. J'ai essayé de le découper pour faire des recollements personnalisés.

## Leçons

- 159 : Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications.

## Références

[1] X. Gourdon. *Algèbre et Probabilités.* Ellipses, 2021.

$E$ est un espace de dimension finie $n$.

**Théorème 1.** *[1] Soit $(f_i)_{i\in I}$ une famille d'endomorphismes trigonalisables de $E$ commutant deux à deux. Alors il existe $\mathcal{B}$ base de $E$ telles que la représentation de $f_i$ dans $\mathcal{B}$ soit triangulaire supérieure pour tout $i \in I$.*

*Démonstration.* Si les $(f_i)_i$ sont tous des homothéties, il n'y a rien à faire, ils sont déjà triangualires supérieures et dans toute base.

On suppose donc qu'il existe au moins un $f \in \{f_i : i \in I\}$ tel que $f$ ne soit pas une homothétie. Montrons par récurrence forte sur $n = \dim(E)$ l'assertion $H_n$ :

$$\exists \lambda \in \mathbb{K}, \forall i \in I, \chi_{f_i}(\lambda) = 0.$$

- Pour $n = 1$, il n'y a rien à faire.
- Supposons le résultat acquis jusqu'au rang $n-1$. Soit $\lambda$ valeur propre de $f$. $f$ n'étant pas une homothétie, $F := \mathcal{E}_\lambda(f) \subsetneq E$ donc $\dim(F) < \dim(E)$. Puisque $\forall i \in I, f_i f = f f_i$, on a $\forall i \in I, f_i(F) \subset F$ donc $f_{iF}$ est un endomorphisme trigonalisable, et ce, pour tout $i \in I$. Ces induits commutent tous deux à deux donc par hypothèse de récurrence, comme $\dim(F) < \dim(E)$, il existe un vecteur propre commun à tous les $f_{iF}$ donc à tous les $f_i$.
- Par principe de récurrence, on a le résultat.

Montrons maintenant par récurrence sur $n = \dim(E)$ l'assertion $K_n$ :

$$\exists \mathcal{B} \text{ base de } E, \forall i \in I, \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f_i) \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}).$$

- Pour $n = 1$, il n'y a rien à faire.

- Supposons le résultat acquis au rang $n-1$. Pour tout $i,j \in I, f_i f_j = f_j f_i$ donc ${}^t f_i {}^t f_j = {}^t f_j {}^t f_i$. Ainsi, puisque $\chi_{f_i} = \chi_{{}^t f_i}$, les $({}^t f_i)_{i\in I}$ sont tous trigonalisables. On en déduit par précédent qu'il existe $x \in E^*$ vecteur propre commun à tous les $({}^t f_i)_{i\in I}$. Alors $\mathbb{K}x$ est stable par tous les $({}^t f_i)_{i\in I}$ donc $(\mathbb{K}x)^\circ =: H$ est stable par tous les $(f_i)_{i\in I}$. $H$ étant de dimension $n-1$, par hypothèse de récurrence, il existe $\mathcal{B}_1$ tel que $\forall i \in I, \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(f_i) \in \mathcal{T}_{n-1}^+(\mathbb{K})$.

  Soit donc $e \in E$ tel que $\mathcal{B} := \mathcal{B}_1 \uplus \{e\}$ soit une base de $E$. Alors

$$\forall i \in I, \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f_i) = \begin{pmatrix} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(f_i) & * \\ 0_{1,n-1} & * \end{pmatrix}$$

  donc

$$\forall i \in I, \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f_i) \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{R}).$$

□

Application.[1] Soit $u_1, \cdots, u_n$ $n$ endomorphismes nilpotent de $\mathcal{L}(E)$ qui commutent avec $E$ de dimension $n$. Alors $u_1 \circ \cdots \circ u_n = 0$.

*Démonstration.* On les cotrigonalise – ils sont trigonalisables car leurs polynômes caractéristiques est $X^n$ –. Soit $\mathcal{B}$ base commune de cotrigonalisation. Puisqu'ils sont nilpotents, le spectre est réduit à $\{0\}$ donc elles sont toutes triangulaires supérieures strictes. Notons donc $F_k = \langle f_1, \cdots, f_k \rangle$. Alors

$$\forall i \in I, \forall k \in [\![1,n]\!], u_i(F_k) \subset F_{k-1}.$$

Ainsi, par hypothèse de récurrence,

$$(u_1 \circ \cdots \circ u_n)(F_n) \underset{\text{Réc.}}{\subset} u_1(F_1) = \{0\}$$

donc comme $F_n = E$, on a $u_1 \circ \cdots \circ u_n = 0$. □

1. Voir le sujet de Mathématiques Générales 2024.