Automorphismes de $\mathfrak{S}_n$

Chen Thomas
t.chen.thomas1[at]gmail.com

16 mai 2024

Attention

1. Ce document contient certainement des coquilles. N'hésitez pas à me le signaler. De même si vous avez une question.
2. Pour les recasages, ce sont les miens mais ce développement se case peut-être ailleurs et je n'y ai pas réfléchi.
3. Il se peut que ce développement dure plus de 15 minutes. J'ai essayé de le découper pour faire des recollements personnalisés.

Leçons

- 105 : Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.

Références

[1] D. Perrin. *Cours d'algèbre.* Ellipses, 1996.

[2] S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas. *Exercices de mathématiques. Oraux X-ENS, Algèbre 1.* Cassini, 2001.

Soit G un groupe et $\varphi : G \to G$ un automorphisme. Il est dit intérieur lorsqu'il existe $g \in G$ tel que $\forall x \in G, \varphi(x) = gxg^{-1}$. Dans toute la suite et sauf mention du contraire, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Lemme 1. [1] Soit $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{S}_n)$. Si φ transforme transposition en transposition, alors φ est intérieur.

Démonstration. Si $n = 2$, il n'y a rien à faire. Prenons donc $n \geq 3$. On note $\tau_i = (1\ i)$. Alors $\langle \tau_i : i \in [\![2, n]\!] \rangle = \mathfrak{S}_n$. Par hypothèse, $\varphi(\tau_i)$ est aussi une transposition. De plus, puisque $\tau_i \tau_j \neq \tau_j \tau_i$, on a $\varphi(\tau_i)\varphi(\tau_j) \neq \varphi(\tau_j)\varphi(\tau_i)$. Ainsi, $\mathrm{supp}(\varphi(\tau_i)) \cap \mathrm{supp}(\varphi(\tau_j)) \neq \emptyset$.

Notons $\varphi(\tau_2) = (a_1\ a_2)$. Alors on peut supposer que $\varphi(\tau_3) = (a_1\ a_3)$. Dans ce cas, on va montrer que

$$\forall i \in [\![2, n]\!], \varphi(\tau_i) = (a_1\ a_i) \text{ avec } \{a_1, \cdots, a_n\} = [\![1, n]\!].$$

Pour ce faire, supposons que ce n'est pas le cas. Alors $n \geq 4$ et il existe $i > 3$ tel que $\varphi(\tau_i)$ ne contienne pas a_1 dans son support. Il contient donc nécessairement a_2 et a_3 qui sont distincts donc $\varphi(\tau_i) = (a_2\ a_3)$. Comme

$$(a_1\ a_2)(a_1\ a_3)(a_2\ a_3) = (a_1\ a_3) i.e. \varphi(\tau_2)\varphi(\tau_3)\varphi(\tau_i) = \varphi(\tau_3),$$

et en composant par φ^{-1}, on a

$$(1\ 2)(1\ 3)(1\ i) = (1\ 3)$$

ce qui n'est pas possible par car à gauche, 2 est envoyé sur 1.

De plus, les $(a_i)_{1\leq i\leq n}$ sont tous distincts car

$$a_i = a_j \iff \varphi(\tau_i) = \varphi(\tau_j) \iff \tau_i = \tau_j \iff i = j.$$

On vient donc de construire une permutation $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}$ et telle que

$$\alpha\tau_i\alpha^{-1} = \varphi(\tau_i).$$

Ainsi, φ est intérieur. □

Lemme 2. [2] Soit φ un automorphisme. Si $n \neq 6$, alors φ envoie transposition sur transposition.

Démonstration. Soit φ un automorphisme et τ une transposition. Alors $\varphi(\tau)$ est aussi d'ordre 2 donc est un produit de transposition à support disjoints. Soit donc

$$T_k = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n : \exists \tau_1, \cdots, \tau_k : \sigma = \prod_{i=1}^{k} \tau_i\}$$

avec $\tau_1, \cdots, \tau_k$ des transpositions à supports disjoints. On va montrer que $\varphi(T_1) \subset T_1$.

1. $\forall \sigma \in T_k, \forall g \in \mathfrak{S}_n, g\sigma g^{-1} \in T_k$ car les supports sont disjoints. T_k est donc distingué dans $\mathfrak{S}_n$.
2. Soit $\sigma \in T_k$. Alors il existe $j \in \mathbb{N}$ tel que $\varphi(\sigma) \in T_j$. Soit donc $\tau \in T_k$. Par précédent, il existe $g \in \mathfrak{S}_n$ tel que $\tau = g\sigma g^{-1}$. Ainsi,
$$\varphi(\tau) = \varphi(g)\varphi(\sigma)\varphi(g)^{-1} \in T_j$$
car T_j est distingué dans $\mathfrak{S}_n$. Ainsi, $\varphi(T_k) \subset T_j$ et l'inclusion réciproque est claire car φ est un automorphisme.
3. Soit donc $k \in \mathbb{N}$ tel que $\varphi(T_1) = T_k$. On va montrer que $k = 1$.
4. Le cardinal de T_1 est $\frac{n(n-1)}{2}$. Pour compter celui de T_k, un peu de dénombrement. Une transposition est entièrement déterminé par son support. Il y a $\binom{n}{2}$ choix pour le premier, puis $\binom{n-2}{2}$ pour le deuxième, etc. Ensuite, on fait permuter les transpositions, il y a $k!$ ordres possibles. Ainsi, le cardinal de T_k est
$$\begin{aligned}|T_k| &= \frac{\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}\cdots\binom{n-2k+2}{2}}{k!} \\ &= \frac{n!(n-2)!\cdots(n-2k+2)!}{2^k(n-2)!\cdots(n-2k)!k!} \\ &= \frac{n!}{2^k k!(n-2k)!} \\ &= \frac{n(n-1)\cdots(n-2k+1)}{2^k k!}.\end{aligned}$$
Par bijectivité de φ, les cardinaux sont les mêmes donc
$$\frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)\cdots(n-2k+1)}{2^k k!} \quad i.e.\ 2^{k-1}k! = (n-2)\cdots(n-2k+1).$$
   - Si $k = 2$, il n'y a pas de solution car on demande $4 = (n-2)(n-3)$ pour un entier n.

- Si $k \geq 3$, on a

$$2^{k-1}k! = (n-2)\cdots(n-2k+1) \iff 2^{k-1}k! = \left(\prod_{i=2}^{k-1}(n-i)\right)\underbrace{\left(\prod_{i=k}^{2k-1}(n-i)\right)}_{=\frac{(n-k)!}{(n-2k)!}} \iff 2^{k-1} = \binom{n-k}{k}\prod_{i=2}^{k-1}(n-i).$$

  Si k est différent de 3, le produit a un facteur impair ce qui n'est pas possible car c'est un diviseur de 2^{k-1}. Ainsi, $k = 3$ et on a

$$f(n) := (n-2)(n-3)(n-4)(n-5) = 24.$$

  $n \mapsto f(n)$ est croissante pour $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ et $f(6) = 24, f(7) = 5! = 120$ donc l'équation n'a de solution que $n = 6$ ce qui est exclu.
- Ainsi, $k = 1$.

Donc $\varphi(T_1) = T_1$ et φ envoie transposition sur transposition.

□

Théorème 3. *Pour $n \neq 6$, les automorphismes de $\mathfrak{S}_n$ sont intérieurs.*

Démonstration. En combinant le résultat du lemme 2 puis du lemme 1, on a donc le résultat. □