Enveloppe convexe de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$

Achille Méthivier

Théorème 1. *On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme $||\cdot||$, subordonnée à la norme euclidienne $||\cdot||_2$ sur $\mathbb{R}^n$ (on notera $\langle\cdot,\cdot\rangle$, le produit scalaire associé). On note B la boule unité fermée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^*$ son dual et $\mathrm{Conv}(\mathrm{O}_n(\mathbb{R}))$, l'enveloppe convexe de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. Alors,*

$$\mathrm{Conv}(\mathrm{O}_n(\mathbb{R})) = B.$$

Lemme 2 (Admis)**.** *Soient A et B deux convexes de $\mathbb{R}^n$. On suppose A fermé, B compact et $A\cap B = \varnothing$. Alors il existe $\varphi \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^*$ telle que $\sup_A \varphi < \inf_B \varphi$.*

Lemme 3 (Admis)**.** *Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$, alors $\mathrm{Conv}(K)$ est compact.*

Lemme 4. *Soit $\varphi \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^*$, alors il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\varphi(M) = \mathrm{tr}(AM)$.*

Démonstration. Regardons l'application linéaire suivante

$$\begin{array}{rccc}\Psi: & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^* \\ & A & \mapsto & \Big(M \mapsto \mathrm{tr}(AM)\Big).\end{array}$$

Soit $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n} \in \ker(\Psi)$, en particulier $\mathrm{tr}(A^tA) = 0$. Comme $\mathrm{tr}(A^tA) = \sum a_{ij}^2$, on en déduit $A = 0$. Finalement, Ψ est injective, donc surjective puisque $\dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^*)$. $\square$

Démonstration du théorème. Comme $\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \subset B$ et que B est convexe, on a $\mathrm{Conv}(\mathrm{O}_n(R)) \subset B$.
Montrons l'inclusion réciproque, soit donc $M \in B$. Si M n'appartenait pas à $\mathrm{Conv}(\mathrm{O}_n(\mathbb{R}))$, comme $\{M\}$ est convexe fermé et $\mathrm{Conv}(\mathrm{O}_n(\mathbb{R}))$ est convexe compact, le lemme 2 donnerait $\varphi \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^*$ telle que $\varphi(M) > \sup_{P\in\mathrm{Conv}(\mathrm{O}_n(\mathbb{R}))} \varphi(P)$. Montrons que

$$\forall \varphi \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^* \quad \varphi(M) \le \sup_{P\in\mathrm{Conv}(\mathrm{O}_n(\mathbb{R}))} \varphi(P).$$

Soit $\varphi \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^*$ et on dispose donc de A comme dans le lemme 4. La décomposition polaire de A donne $O \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et S symétrique positive, telles que $A = OS$. D'après le théorème spectral, il existe $(e_1,\dots,e_n)$ base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres pour S. On a alors

$$\mathrm{tr}(AO^{-1}) = \mathrm{tr}(S) = \sum_{i=1}^n \langle Se_i, e_i\rangle = \sum_{i=1}^n ||Se_i||_2.$$

De plus,

$$\mathrm{tr}(AM) = \mathrm{tr}(MA) = \sum_{i=1}^n \langle MAe_i, e_i\rangle = \sum_{i=1}^n \langle Ae_i, M^*e_i\rangle,$$

où M^* est l'adjoint de l'endomorphisme M (pour le produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$). D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\mathrm{tr}(AM) \le \sum_{i=1}^n ||Ae_i||_2||M^*e_i||_2.$$

Comme O est une isométrie, $||Ae_i||_2 = ||Se_i||_2$ et puisque $||M|| \le 1$, $||M^*|| \le 1$. En effet, pour $||x|| \le 1$, par Cauchy-Schwarz

$$||M^*x||^2 \le \langle MM^*x, x\rangle \le ||M||\cdot||M^*x||_2.$$

On en déduit

$$\mathrm{tr}(AM) \le \sum_{i=1}^n ||Se_i||_2||M^*e_i||_2 \le \sum_{i=1}^n ||Se_i||_2 = \mathrm{tr}(AO^{-1}) \le \sup_{P\in\mathrm{Conv}(\mathrm{O}_n(\mathbb{R}))} \varphi(P).$$

$\square$

I Références

1. Algèbre L3, Szpirglas (page 344)