réf : El Amrani
Analyse de Fourier
p. 197, 187 et 95

(Bernis aussi mais bouof)

Développement : Sommation d'Abel-Poisson des séries de Fourier

leçons : 209, 235, 241, 246

Théorème :

Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$. $f_r(x) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\, r^{|n|} e^{inx}$ $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall r \in [0,1[$

(1) Si f admet une limite à gauche et une limite à droite en $x \in [-\pi,\pi]$
alors $f_r(x) \xrightarrow[r\to 1^-]{} \frac{1}{2}\left(f(x_+) + f(x_-)\right)$

(2) Si f est continue, alors $f_r \longrightarrow f$ unif. en x

Rq : • f_r est bien déf. car la série cv normalement ($|c_n f| \leq \|f\|_{L^1}$ et $r < 1$ série géom)

Rappels sur le noyau de Poisson

$\forall r \in [0,1[$, $\forall x \in \mathbb{R}$ $\boxed{P_r(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|} e^{inx} = \frac{1-r^2}{1-2r\cos x + r^2}}$

(série bien déf car cvN)

$\boxed{P_r \text{ est positive, paire, } 2\pi\text{-périodique}}$ $\left(1 - 2r\cos x + r^2 = (r-\cos x)^2 + \sin^2 x\right)$

$$\boxed{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(x)\,dx = 1}$$

(intégration terme à terme car cvN puis int. de e^{inx})

<u>Preuve</u>:

Remarquons d'abord que $f_r = P_r * f$

En effet, $\forall x \in \mathbb{R}$ $f_r(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{in(x-y)}dy$

$f_r(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\underbrace{\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|} e^{in(x-y)}\right)}_{P_r(x-y)}dy$ car $\sum c_n(f) r^{|n|} e^{inz}$ cvN de cvu sur $[-\pi,\pi]$ (vu)

$f_r(x) = f * P_r(x)$ (rq f_r est de $\mathcal{C}^\infty$ car P_r l'est (peut se voir direct aussi))

(1) P_r est paire d'intégrale 2π donc $\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} P_r = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} P_r = \frac{1}{2}$

$f_r(x) - \frac{1}{2}\left(f(x_+) - f(x_-)\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)P_r(y)dy - \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} P_r(y)f(x_-)dy - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} P_r(y)f(x_+)dy$

$= \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} P_r(y)\left(f(x-y) - f(x_-)\right)dy}_{J_r} + \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} P_r(y)\left(f(x-y) - f(x_+)\right)dy}_{I_r}$

$|J_r| \leq \int_0^{\pi} P_r(y)|f(x-y) - f(x_-)|dy$. Soit $\varepsilon > 0$. Par déf. de $f(x_-)$ $\exists\, \delta > 0$ ($\delta \leq \pi$) tq $\forall y \in [0,\delta]$ $|f(x-y) - f(x_-)| \leq \varepsilon$

$|J_r| \leq \int_0^{\delta} P_r(y)|f(x-y) - f(x_-)|dy + \int_{\delta}^{\pi} P_r(y)|f(x-y) - f(x_-)|dy$

$\leq \varepsilon\int_0^{\delta} P_r(y)dy + \int_{\delta}^{\pi} P_r(y)|f(x-y) - f(x_-)|dy$

$\leq \varepsilon\underbrace{\int_0^{\pi} P_r(y)dy}_{=\pi\varepsilon} + \int_{\delta}^{\pi} P_r(y)|f(x-y) - f(x_-)|dy$

Or $\forall x \in [\delta, \pi[\quad P_r(x) \leq \dfrac{1-r^2}{\sin^2\delta}$. en effet cos ↘ sur $[0,\pi]$ donc

$1-2r\cos x + r^2 \geq 1 - 2r\cos\delta + r^2 = (r-\cos\delta)^2 + \sin^2\delta \geq \sin^2\delta$

Il vient $|J_r| \leq \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{1-r^2}{\sin^2\delta} \underbrace{\int_\delta^\pi |f(x-y) - f(x)|\, dy}_{\text{fixe indép. de } r}$

$\leq \varepsilon$ si r assez proche de 1

$|J_r| \xrightarrow[r \to 1^-]{} 0$. De même on mq $|I_r| \xrightarrow[r\to 1^-]{} 0$ (1) est vraie.

(2) Remarquons que si f est cont., comme est périodique, le th de Heine implique f unif. cont.

Soit $\varepsilon > 0$. $\exists \delta \in [0,\pi[$ tq $\forall y, z \in \mathbb{R}$ $|x-z| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(z)| \leq \varepsilon$

$$|f_r(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(y) |f(x-y) - f(x)|\, dy$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_{0 \leq |y| < \delta} P_r(y) |f(x-y) - f(x)|\, dy + \frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |y| \leq \pi} P_r(y) |f(x-y) - f(x)|\, dy$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{0 \leq |y| < \delta} P_r(y)\, dy + \frac{P_r(\delta)}{2\pi} \underbrace{\int_{\delta \leq |y| \leq \pi} |f(x-y) - f(x)|\, dy}_{\leq 2\|f\|_\infty 2\pi}$$

car P_r est paire et ↘ sur $[0,\pi]$ car cos l'est

$$\leq \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(y)\, dy + 2\|f\|_\infty P_r(\delta)$$

$$\leq \varepsilon + 2\|f\|_\infty \underbrace{P_r(\delta)}_{\xrightarrow[r \to 1^-]{} 0 \text{ unif en } x}$$

d'où le résultat

ici δ est indép. de x grâce à la unif. cont.!!

Rq : Si f cont $\overset{\text{sur } \mathbb{R}}{}$, f périodique, alors f unif cont. (T la période)

$[0, T]$ est compact, f cont. sur $[0,T]$ donc unif cont. sur $[0,T]$

Soit $\varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tq $\forall x, y \in [0, T]$ $|x-y| \leq \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \varepsilon$
(en part. $\delta \leq T$)

Soit $x, y \in \mathbb{R}$, $x \leq y$ si $|x-y| \leq \delta$, $|f(x)-f(y)| = |f(x - \lfloor \frac{x}{T} \rfloor T) - f(y - T\lfloor \frac{x}{T} \rfloor)| \leq \varepsilon$ car

- $x - \lfloor \frac{x}{T} \rfloor T \in [0, T]$

  $\lfloor \frac{x}{T} \rfloor \leq \frac{x}{T} < \lfloor \frac{x}{T} \rfloor + 1$ donc

  $T > x - \lfloor \frac{x}{T} \rfloor T \geq 0$

- $y - T\lfloor \frac{x}{T} \rfloor \in [0, T]$ car

  $y - T\lfloor \frac{x}{T} \rfloor \geq x - T\lfloor \frac{x}{T} \rfloor \geq 0$

  $|y-x| \leq \delta \leq T$

- $|(x - T\lfloor \frac{x}{T} \rfloor) - (y - T\lfloor \frac{x}{T} \rfloor)| \leq \delta$