Réf : FGN, Algèbre 1 p. 220

Développement : Suites de Sturm

Leçons : 144, 226, 142.

Théorème : Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On pose $\begin{cases} S_0 = P \\ S_1 = P' \end{cases}$ et si $S_i \neq 0$, on définit S_{i+1} par $\begin{cases} S_{i-1} = A_i S_i - S_{i+1} \\ \deg(S_{i+1}) < \deg(S_i) \end{cases}$ (S_{i+1} = moins le reste de la div. eucl. de S_{i-1} par S_i)

$\forall x \in \mathbb{R}$, on note $V(x)$ le nombre de changements de signes stricts dans la suite $S_0(x), \dots, S_p(x)$ (où p est tq $S_{p+1} = 0$)

$$V(x) = \#\left\{ (i,j) \;\middle|\; 0 \leq i < j \leq p, \begin{cases} S_i(x) S_j(x) < 0 \\ \forall k \in \{i+1, \dots, j-1\} \; S_k(x) = 0 \end{cases} \right\}$$

Soient $a < b$ tels que $P(a)P(b) \neq 0$. Alors le nombre de racines distinctes de P dans $[a, b]$ est $V(a) - V(b)$.

Preuve :

- On peut supposer que P est sans facteur carré :

On pose $T = \dfrac{P}{P \wedge P'}$.

Par construction, la suite des S_i est au signe près la suite des restes obtenus en effectuant l'algorithme d'Euclide pour P et P', donc $\forall\, i \in \{0, \dots, p\}$ $\operatorname{pgcd}(S_i, S_{i+1}) = S_p = \operatorname{pgcd}(P \wedge P')$

Pour T, la suite devient $T_i = \dfrac{S_i}{S_p}$. T est à racines simples et a mêmes racines que P. On note $V_1(x)$ le nombre de changements de signes dans $(T_i(x))_{0 \leq i \leq p}$.

comme $P(a) \neq 0$, $S_p(a) \neq 0$ (car $S_p \mid P$) donc $\forall i$ $T_i(a) = \frac{S_i(a)}{S_p(a)}$

et donc $V_1(a) = V(a)$. De même, $V_1(b) = V(b)$. Donc $V(a) - V(b) = V_1(a) - V_1(b)$.

- Montrons que $V_1(a) - V_1(b)$ vaut le nombre de racines de T sur $[a, b]$. (idée : regarder comment varie $V_1(x)$ lorsque x parcours $[a, b]$)

(1) Si $I \subset [a, b]$ intervalle est tel que aucun des T_i ne s'annule sur I, alors V est constante sur I

ex : si $I = [c, d]$

$$\begin{array}{lcl}
T_0(c) & \longrightarrow & T_0(d) \leftarrow \text{signe cst} \\
T_1(c) & \longrightarrow & T_1(d) \leftarrow \text{signe cst} \\
\vdots & & \\
T_p(c) & \longrightarrow & T_p(d) \leftarrow \text{signe cst.}
\end{array}$$

Lorsque x ne traverse aucune racine (d'aucun des T_i), $V_1(x)$ ne change pas.

(2) Si $\alpha \in [a, b]$ est une racine de T (on a alors $a < \alpha < b$)

(cas où $T'(\alpha) > 0$) ici $h > 0$

	$\alpha - h$	α	$\alpha + h$
T	$-$	0	$+$
$2TT'$	$-$	0	$+$
T'	$+$	$+$	$+$

T^2 a un minimum local en α donc sa dérivée $2TT'$ est négative puis positive.

Or pour $h > 0$ assez petit, T' est de signe constant (non nul) sur $[\alpha - h, \alpha + h]$ (α pas racine de T')

Donc T est du signe opposé à T' avant α, du même signe après (cf tableau)

Ainsi lorsque x "traverse" une racine de T, $V_1(x)$ diminue de 1 (ici $V_1(\alpha+h) = V_1(\alpha-h) - 1$)

(3) Si $\alpha \in [a,b]$ est une racine de T_i avec $i \geq 1$ $(T_i \neq T)$.

Alors $i < p$ (Sinon α racine de T car $S_p | T$) et α n'est racine ni de T_{i-1}, ni de T_{i+1} (car $\forall j$ $\operatorname{pgcd}(T_j, T_{j+1}) = \operatorname{pgcd}(T, T') = 1$ algo d'Euclide).

Comme $T_{i-1} = A_i T_i - T_{i+1}$, en évaluant en α, $T_{i-1}(\alpha) = -T_{i+1}(\alpha)$

donc $T_{i-1}(\alpha) T_{i+1}(\alpha) < 0$

Par continuité, on a encore $T_{i-1}(x) T_{i+1}(x) < 0$ si x est assez proche de α.

si $T_{i-1}(x) > 0$

	$\alpha - h$	α	$\alpha + h$
T_{i-1}	$+$	$+$	$+$
T_i	$+/-$	0	$+/-$
T_{i+1}	$-$	$-$	$-$

Ainsi lorsque x "traverse" α racine de T_i $(i \geq 1)$ $V_1(x)$ ne change pas.

Les T_i n'ont qu'un nombre fini de racines, donc lorsque x parcourt $[a,b]$, $V_1(x)$ diminue du nombre de racines de T, i.e. $V(a) - V(b)$ est le nombre de racines de T entre a et b.

$\square$

Remarques:

- Pour localiser les racines de P dans l'intervalle $[a,b]$, on calcule la suite de Sturm (Euclide en $O(\deg P^2)$ opérations dans $\mathbb{R}$) puis on procède par dichotomie pour isoler les racines d'abord, puis pour les approcher ensuite.