Espace de Bergman du disque unité

Achille Méthivier

Théorème 1. *Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$. On note $\mathrm{d}z$ la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ et $H^2(\Omega)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur Ω dont le module est de carré intégrable. Alors, $H^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire*

$$\langle f, g\rangle = \int_\Omega f(z)\overline{g(z)}\,\mathrm{d}z.$$

Pour $\Omega = \mathbb{D}$ le disque unité ouvert, la famille $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par $e_n(z) = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}}z^n$, est une base hilbertienne de $H^2(\mathbb{D})$.

Lemme 2. *Soit $f \in H^2(\Omega)$ et $a \in \Omega$. On note $\rho(a)$ le max des r tel que le disque ouvert $\mathbb{D}(a,r)$, de centre a et de rayon r, soit inclus dans Ω. On a alors*

1. Pour $R > 0$ tel que $\mathbb{D}(a,R) \subset \Omega$,

$$f(a) = \frac{1}{\pi R^2}\int_{\mathbb{D}(a,R)} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

2.

$$|f(a)| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}\rho(a)}||f||.$$

Démonstration. Soit $a \in \Omega$ et $R > 0$ tel que $\mathbb{D}(a,R) \subset \Omega$. Puisque f holomorphe sur Ω, elle est analytique sur $\mathbb{D}(a,R)$,

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n(z-a)^n.$$

Pour $0 < r < R$, on a convergence normale de la série $\sum a_n(z-a)^n$ sur $\mathbb{D}(a,r)$, on peut donc inverser somme et intégrale :

$$\int_{\mathbb{D}(a,r)} f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{n\geq 0} a_n \int_{\mathbb{D}(a,r)} (z-a)^n\,\mathrm{d}z.$$

Effectuons le changements de variables $(\rho,\theta) \mapsto z = a + \rho\,\mathrm{e}^{i\theta}$, qui est bien un C^1 difféomorphisme entre $[0,r[\times([0,2\pi[\setminus\{\pi\})$ et $\mathbb{D}(a,r)$ de jacobien égal à ρ. Donc

$$\int_{\mathbb{D}(a,r)} f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{n\geq 0} a_n \int_{[0,r[\times[0,2\pi[} \rho^{n+1}\,\mathrm{e}^{in\theta}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta.$$

Comme $(\rho,\theta) \mapsto \rho\,\mathrm{e}^{i\theta}$ est de module intégrable, par le théorème de Fubini

$$\int_{[0,r[\times[0,2\pi[} \rho^{n+1}\,\mathrm{e}^{in\theta}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta = \int_0^r \rho^{n+1} \underbrace{\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{in\theta}\,\mathrm{d}\theta}_{=0 \text{ sauf si } n=0}.$$

Finalement,

$$\int_{\mathbb{D}(a,r)} f(z)\,\mathrm{d}z = a_0\pi r^2 = f(a)\pi r^2.$$

Puisque $D(a,R)$ est de mesure finie, $L^1(D(a,R)) \subset L^2(D(a,R))$ et donc l'intégrabilité de $|f|$ permet d'appliquer la convergence dominée :

$$\lim_{r\to R}\int_{\mathbb{D}(a,r)} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\mathbb{D}(a,R)} f(z)\,\mathrm{d}z = f(a)\pi R^2.$$

On a, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz et ce qui précède,

$$\begin{aligned}
||f||^2 = \int_\Omega |f(z)|^2\,\mathrm{d}z &\geq \int_{\mathbb{D}(a,\rho(a))} |f(z)|^2\,\mathrm{d}z \\
&\geq \frac{1}{\pi\rho(a)^2}\left|\int_{\mathbb{D}(a,\rho(a))} f(z)\,\mathrm{d}z\right|^2 \\
&\geq \pi\rho(a)^2|f(a)|^2.
\end{aligned}$$

□

Démonstration du théorème. On souhaite montrer que $H^2(\Omega)$ est complet pour la norme $||\cdot||$, issue du produit scalaire. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de Cauchy de $H^2(\Omega)$. D'après le lemme, pour $z \in \Omega$,

$$|f_n(z) - f_m(z)| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}\rho(z)}||f_n - f_m||.$$

Pour K un compact inclus dans Ω, on a pour $z \in K$, $\rho(z) \geq d(K, {}^c\Omega) > 0$, donc

$$||f_n - f_m||_{\infty,K} \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}d(K,{}^c\Omega)}||f_n - f_m||.$$

Donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout compact K inclus dans Ω, par le théorème de Weierstrass, sa limite f est holomorphe sur Ω. De plus, comme $L^2(\Omega, \mathrm{d}z)$ est complet, il existe $g \in L^2(\Omega, \mathrm{d}z)$ telle que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers g. En particulier, il existe une sous-suite de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge presque partout vers g, donc $f = g$ presque partout.
Vérifions dans un premier temps que la famille $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthonormée. D'après le même changement variable effectué dans la preuve du lemme

$$\begin{aligned}\langle e_n, e_m\rangle &= \frac{\sqrt{(m+1)(n+1)}}{\pi}\int_{|z|<1} \overline{z^m} z^n \,\mathrm{d}z \\ &= \frac{\sqrt{(m+1)(n+1)}}{\pi}\int_0^1 \rho^{n+m+1}\,\mathrm{d}\rho \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{i(n-m)\theta}\,\mathrm{d}\theta \\ &= \delta_{nm}.\end{aligned}$$

Notons $c_n = \langle f, e_n\rangle$. Comme $f \in H(\mathbb{D})$ on a

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n \,\mathrm{d}z.$$

Par convergence dominée,

$$\begin{aligned}c_n &= \sqrt{\frac{n+1}{\pi}}\int_{|z|<1} f(z)\overline{z^n}\,\mathrm{d}z \\ &= \sqrt{\frac{n+1}{\pi}}\lim_{r\to 1^-}\int_{|z|<r} f(z)\overline{z^n}\,\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}\int_{|z|<r} f(z)\overline{z^n}\,\mathrm{d}z &= \sum_{k\geq 0} a_k \int_{|z|<r} z^k \overline{z^n}\,\mathrm{d}z \\ &= \pi a_n \frac{r^{2n+2}}{n+1},\end{aligned}$$

donc $c_n = a_n\sqrt{\frac{\pi}{n+1}}$. Regardons maintenant la norme de f

$$\begin{aligned}||f||^2 &= \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2\,\mathrm{d}z \\ &= \lim_{r\to 1}\int_{|z|<r} f(z)\sum_{n\geq 0}\overline{a_n}\overline{z^n}\,\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

Comme pour le calcul des c_n, on obtient

$$\sum_{n\geq 0}\overline{a_n}\int_{|z|<r} f(z)\overline{z^n}\,\mathrm{d}z = \sum_{n\geq 0}|c_n|^2 r^{2n+2} = S(r)$$

Pour $r \in [0,1[$, on a

$$S(r) \leq ||f||^2.$$

Pour $N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=0}^{N} |c_n|^2 r^{2n+2} \leq S(r) \leq ||f||^2.$$

En faisant $r \to 1^-$, on obtient

$$\sum_{n=0}^{N} |c_n|^2 \leq ||f||^2,$$

donc la série de terme générale $|c_n|^2$ converge. Or la série de fonctions $r \mapsto \sum_{n\geq 0}|c_n|^2 r^{2n+2}$ est convergente sur $[0,1[$ et la somme $\sum_{n\geq 0}|c_n|^2$ est finie, il y a en fait convergence normale de la série de fonctions sur $[0,1]$. En particulier,

$$||f||^2 = \lim_{r\to 1} S(r) = \sum_{n\geq 0}|c_n|^2.$$

On a démontre la formule de Parseval, qui implique que la famille est totale.

□