Fonctions caractéristiques, moments et théorème limite central

Achille Méthivier

Proposition 1. *Soit X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et φ_X sa fonction caractéristique. On a,*

1. *Si X admet un moment d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$, alors φ_n est de classe C^n et on a, pour $1 \leq k \leq n$,*
$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi_X^{[k]}(t) = i^k \int_\Omega X^k \exp(itX)\,\mathrm{d}\mathbb{P},$$
et en particulier
$$\varphi^{[k]}(0) = i^k \mathbb{E}(X^k).$$
2. *Inversement, si φ_X est $2n$ fois dérivable en 0 ($n \geq 1$), X admet des moments jusqu'à l'ordre $2n$ et vérifie les formules ci-dessus.*

Démonstration. Démontrons la première assertion. Puisque

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k} \exp(itX) = (iX)^k \exp(itX),$$

et comme

$$\left| \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k} \exp(itX) \right| \leq |X|^k.$$

On conclut par théorème de dérivation sous le signe intégral.
Inversement, montrons la proposition par récurrence sur n. Pour $n = 0$, $\mathbb{E}(X^0) = 1$ et il n'y a donc rien à démontrer. Pour $n \geq 1$, supposons la propriété vraie au rang $n-1$. Comme φ_X est C^{2n}, elle est $C^{2(n-1)}$ et admet donc un moment d'ordre $2(n-1)$. Le sens direct donne donc

$$\varphi_X^{[2(n-1)]}(t) = (-1)^{n-1} \int_\Omega X^{2(n-1)} \exp(itX)\,\mathrm{d}\mathbb{P},$$

et en particulier

$$\varphi_X^{[2(n-1)]}(0) = (-1)^{n-1} \mathbb{E}(X^{2(n-1)}).$$

Comme $\varphi_X^{[2(n-1)]}$ est deux fois dérivable en 0, la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 donne

$$\varphi_X^{[2(n-1)]}(t) = (-1)^{n-1}\mathbb{E}(X^{2(n-1)}) + t\varphi_X^{[2(n-1)+1]}(0) + \frac{t^2}{2}\varphi_X^{[2n]}(0) + o(t^2).$$

On en déduit que

$$\frac{\varphi_X^{[2(n-1)]}(t) + \varphi_X^{[2(n-1)]}(-t) - 2(-1)^{n-1}\mathbb{E}(X^{2(n-1)})}{t^2} \xrightarrow[t \to 0]{} \varphi_X^{[2n]}(0).$$

Et comme

$$\varphi_X^{[2(n-1)]}(t) + \varphi_X^{[2(n-1)]}(-t) = (-1)^{n-1} 2\mathbb{E}(X^{2(n-1)} \cos(tX)),$$

on en déduit

$$\lim_{t \to 0} \mathbb{E}\left(X^{2(n-1)} \frac{1 - \cos(tX)}{t^2} \right) = \frac{(-1)^n}{2} \varphi_X^{[2n]}(0).$$

Or $2 \liminf_{t \to 0} \frac{1 - \cos(tX)}{t^2} = X^2$. Pour $(t_p)_{p \in \mathbb{N}}$ suite de réels strictement positifs quelconque telle que $t_p \to 0$, comme $\frac{1-\cos(tX)}{t^2} \geq 0$, le lemme de Fatou donne

$$\begin{aligned} \int_\Omega X^{2n}\,\mathrm{d}\mathbb{P} &= \mathbb{E}\left(X^{2(n-1)} 2 \liminf_{p \in \mathbb{N}} \frac{1 - \cos(t_p X)}{t_p^2} \right) \\ &\leq 2 \liminf_{p \in \mathbb{N}} \mathbb{E}\left(X^{2(n-1)} \frac{1 - \cos(t_p X)}{t_p^2} \right) < +\infty. \end{aligned}$$

□

Théorème 2. *Soit $(X_i)_{i \geq 1}$ une suite de variables aléatoire définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et identiquement distribuées. On note X une variable aléatoire de même loi que les X_i et on suppose que $\mathbb{E}(X^2) < +\infty$. Alors, en posant $S_n = \sum_{1 \leq k \leq n} X_i$, on a la convergence en loi de $\frac{S_n - n\mathbb{E}(X)}{\sqrt{n}}$ vers $\mathcal{N}(0, \mathrm{Var}(X))$.*

Démonstration du théorème. Si X est constante p.s., puisque $\mathcal{N}(0,0)$ est la masse de Dirac en 0, le résultat est vrai.
Supposons donc le contraire, de sorte que $\mathrm{Var}(X) \neq 0$ et quitte à remplacer les X_i par $(X_i - \mathbb{E}(X_i))/\sqrt{\mathrm{Var}(X_i)}$, supposons $\mathbb{E}(X_i) = 0$ et $\mathrm{Var}(X_i) = 1$. Par le théorème de Paul-Lévy, il suffit de justifier que, pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n \to \infty} \varphi_{S_n/\sqrt{n}}(t) = \mathrm{e}^{-t^2/2}.$$

Soit $t \in \mathbb{R}$ fixé, par indépendance et équidistribution, on a pour tout $n \geq 1$,

$$\varphi_{S_n/\sqrt{n}}(t) = \left(\varphi_X(t/\sqrt{n}) \right)^n.$$

Comme X admet un moment d'ordre 2, φ_X est deux fois dérivables en 0 et on a

$$\varphi_X'(0) = \mathbb{E}(X) = 0 \quad \varphi_X''(0) = -\mathbb{E}(X^2) = -1.$$

D'après la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 en 0

$$\varphi_X(u) = 1 - \frac{u^2}{2} + o(u).$$

Donc

$$\varphi_{S_n/\sqrt{n}}(t) = \left(1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n.$$

Pour n assez grand, $1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ est dans le disque ouvert de centre 1 et de rayon 1. Or, il existe une détermination holomorphe du logarithme sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-^*$, notée $\log$ qui vérifie de plus

$$\forall |z| < 1 \quad \log(1+z) = z + o(z).$$

Donc

$$\begin{aligned}
\varphi_{S_n/\sqrt{n}}(t) &= \exp\left(n \log\left(1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) \\
&= \exp\left(-\frac{t^2}{2} + o(1)\right) \\
&= \mathrm{e}^{-t^2/2+o(1)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^{-t^2/2}.
\end{aligned}$$

□