Ellipsoïde de John Loewner

Achille Méthivier

Théorème 1. *Soit K un compact d'intérieur non vide de $\mathbb{R}^n$. Alors il existe un unique ellipsoïde centré en 0, de volume minimal et contenant K.*

Lemme 2. *Notons $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives réelles. Alors l'application* $\det$ *est strictement* $\ln$*-concave sur $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.*

Démonstration. Soit A, $B \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, avec $A \neq B$ et $\alpha \in]0,1[$. On note $\beta = 1-\alpha$, d'après le théorème spectral, il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ telles que

$$A = {}^tPP \quad B = {}^tPDP.$$

Comme $B \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, les $\lambda_i > 0$, donc

$$(\det A)^\alpha (\det B)^\beta = (\det P^2)^\alpha (\det P^2 \det D)^\beta = \det P^2 (\det D)^\beta,$$

et on a $\det(\alpha A + \beta B) = \det P^2(\det(\alpha I_n + \beta D))$. Or, comme $A \neq B$, on a $\lambda_{i_0} \neq 1$, et comme $\alpha \in]0,1[$,

$$\ln(\alpha + \beta\lambda_{i_0}) > \alpha \ln(1) + \beta \ln(\lambda_{i_0}).$$

Il en suit que

$$\sum_{i=1}^n \ln(\alpha + \beta\lambda_i) > \beta \sum_{i=1}^n \ln(\lambda_i),$$

donc

$$\det(\alpha I_n + \beta D) = \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta\lambda_i) > \left(\prod_{i=1}^n \lambda_i\right)^\beta = \det(D)^\beta.$$

D'où l'inégalité stricte $\det(\alpha A + \beta B) > (\det A)^\alpha (\det B)^\beta$. $\square$

Démonstration du théorème. On note Q (resp Q^+, resp Q^{++}), l'espace vectoriel des formes quadratiques sur $\mathbb{R}^n$ (resp l'ensemble des formes positives, resp. définies positives). Soit q une $\in Q^{++}$, on définit l'ellipsoïde associé à q comme

$$\mathcal{E}_q = \left\{x \in \mathbb{R}^n : q(x) \leq 1\right\}.$$

On définit le discriminant $D(q)$ de q comme le déterminant de S, matrice de q dans une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$. Le discriminant est bien défini puisque que le déterminant est invariant par changement de bases orthonormées et c'est une quantité strictement positive. En notant V_q le volume de $\mathcal{E}_q$, un changement de variables donne

$$V_q = \frac{V_0}{\sqrt{D(q)}},$$

où V_0 est le volume de la boule euclidienne. Il s'agit donc de maximiser $D(q)$. Pour cela, introduisons

$$\mathcal{A} = \left\{q \in Q^+ : \forall x \in K \ q(x) \leq 1\right\}.$$

C'est une partie de Q^+ qui est fermé dans l'espace vectoriel de dimension finie Q, qu'on munit de la norme $N(q) = \sup_{||x|| \leq 1} |q(x)|$. Montrons que $\mathcal{A}$ est un compact, convexe et non vide.

- $\mathcal{A}$ est convexe : pour q, $q' \in \mathcal{A}$, $\lambda \in [0,1]$, on a $\lambda q + (1-\lambda)q' \geq 0$ et pour $x \in K$, $\lambda q(x) + (1-\lambda)q'(x) \leq \lambda + 1 - \lambda = 1$.
- $\mathcal{A}$ est fermé : pour $x \in K$, la l'application $\varphi_x : q \in Q \mapsto q(x) \in \mathbb{R}$ est continue car linéaire en dimension finie. Or,

$$\mathcal{A} = \bigcap_{x \in K} \varphi_x^{-1}(]-\infty, 1]) \cap Q^+,$$

  qui est donc bien fermé comme intersection de fermés.
- $\mathcal{A}$ est borné : comme K d'intérieur non vide donc on dispose de $a \in K$ et $r > 0$ tels que $\overline{B(a,r)} \subset K$. Pour $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $||x|| \leq 1$, on a $||rx|| \leq r$ donc $a + rx \in K$. D'après l'inégalité de Minkowski

$$\sqrt{q(x)} = \frac{1}{r}\sqrt{q(a+rx-a)} \leq \frac{1}{r}\left(\sqrt{q(a+rx)} + \sqrt{q(-a)}\right) \leq \frac{2}{r},$$

  et comme $q \geq 0$, on a $N(q) \leq \frac{4}{r^2}$.
- Enfin, comme K est compact, il existe $M > 0$ tel que $K \subset B(0,M)$ et la forme quadratique $x \mapsto ||x||^2/M$ est dans $\mathcal{A}$.

Par continuité du déterminant, l'application $q \mapsto D(q)$ est elle même continue. $\mathcal{A}$ est fermée, bornée en dimension finie donc compacte, elle y atteint un maximum en q (automatiquement définie positive).
Montrons l'unicité d'une telle forme quadratique q. Soit $q' \in \mathcal{A}$ tel que $D(q) = D(q')$. Par convexité de $\mathcal{A}$, $\frac{1}{2}(q + q') \in \mathcal{A}$, et supposons $q \neq q'$, mais d'après le lemme 2

$$D\left(\frac{1}{2}(q' + q)\right) > D(q)^{1/2} D(q')^{1/2} = D(q),$$

ce qui contredit la maximalité de $D(q)$.

$\square$

I Références

1. Oraux X-ens : algèbre 3, Francinous, Gianella, Nicolas (pages 222 et 229)