Lemme. *pour $n \geq 5$, A_n est engendré pas les 3-cycles et les 3-cycles sont conjugués dans A_n*

Démonstration. *$\mathfrak{S}_n$ est engendré par les transpositions. Soit $\sigma \in A_n$, on note $\sigma = \tau_1 ... \tau_p$. comme la signature de σ est 1, p est pair. On a trois cas :*

- *$\tau_i \tau_j = id$ alors $\tau_i = \tau_j$ et on peut retirer un τ_i du développement.*
- *$\tau_i \tau_j = (a\ b)(b\ c) = (a\ b\ c)$*
- *$\tau_i \tau_j = (a\ b)(c\ d) = (a\ b\ c)(b\ c\ d)$*

Dans tous les cas on peut réecrire σ comme un produit de 3-cycles.

soient $(a\ b\ c), (a'\ b'\ c')$ deux trois cycles. Ils sont conjugués dans $\mathfrak{S}_n$: $(a\ b\ c) = \sigma(a'\ b'\ c')\sigma^{-1} = (\sigma(a)\ \sigma(b)\ \sigma(c))$. Si $\sigma \in A_n$ alors on a fini. Sinon $(-1)^\sigma = -1$ soit $\tau = (x\ y)$ avec $x, y \notin \{a', b', c'\}$ (existe ca $n \geq 5$) et alors $(a\ b\ c) = (\sigma\tau(a)\ \sigma\tau(b)\ \sigma\tau(c)) = \sigma\tau(a'\ b'\ c')(\sigma\tau)^{-1}$ et $\sigma\tau \in A_n$

théorème. *pour $n \geq 5$, A_n est simple.*

Démonstration. *Soit H un sous groupe distingué non trivial de A_n. on va voir que $H = A_n$ en montrant que les 3-cycles sont dans H. Par les lemme, les 3-cycles sont conjugués dans A_n et H est stble par conjugaison puisque distingué. Soit $\sigma \in H \setminus \{id\}$. Comme $\sigma \neq id$, il existe a tel que $a \neq \sigma(a)$. on note $b = \sigma(a)$ et soit $c \notin \{a, c, \sigma(b)\}$, $\gamma = (a\ c\ b)$. On consière $p = \gamma\sigma\gamma^{-1}\sigma^{-1} = (a\ c\ b)(\sigma(a)\ \sigma(c)\ \sigma(b))$. $p \neq id$ car $p(b) = \tau\sigma\tau^{-1}\sigma^{-1}(b) = \tau\sigma(b)$ et par définition de τ, $\tau\sigma(b) \neq b$ donc $p(b) \neq (b)$. De plus $p \in H$ car comme H est distingué, $\tau\sigma\tau^{-1} \in H$. Soit $F = \{a, b, c, \sigma(b), \sigma(c)\}$ de cardnal ≤ 5. Tous les points de $\{1, ..., n\} \setminus F$ sont fixes par p, ainsi p est une double transposition, un 3-cycle ou un 5-cycle. On a vu que $p \neq id$ donc on a*

- *Si p est un 3-cycle, alors comme les trois cycles sont conjugués dans A_n H contient les 3-cycles donc $H = A_n$*
- *Si p est une double transposition $(x_1\ x_2)(x_3\ x_4)$, soit x_5 différent des précédent, alors*

  $$(x_1\ x_2\ x_5)p(x_1\ x_2\ x_5)^{-1}p^{-1} = (x_1\ x_2\ x_5)(p(x_1)\ p(x_5)\ p(x_2)) = (x_1\ x_2\ x_5)(x_2\ x_5\ x_1) = (x_1\ x_5\ x_2) \in H$$

  donc $H = A_n$
- *Si $p = (x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5)$ alors*

  $$(x_1\ x_2\ x_3)p(x_1\ x_2\ x_3)^{-1}p^{-1} = (x_1\ x_2\ x_3)(p(x_1)\ p(x_3)\ p(x_2)) = (x_1\ x_2\ x_3)(x_2\ x_4\ x_3) = (x_1\ x_2\ x_4) \in H$$

  Donc $H = A_n$

A_n est donc simple

théorème. *les sous groupes distingués de $\mathfrak{S}_n$ sont $\{0\}$, A_n et $\mathfrak{S}_n$*

Démonstration. *Soit G un sous groupe distingué de $\mathfrak{S}_n$. $G \cap A_n$ est un sous-groupe distingué de A_n. Or comme A_n est simple $G \cap A_n = \{id\}$ ou A_n. Si $G \cap A_n = A_n$ alors $|G| \geq \frac{n!}{2}$ donc par le théorème de Lagrange : $|G| = n!$ et $G = \mathfrak{S}_n$ ou $|G| = \frac{n}{2}$ et $G = A_n$. Sinon si $G \cap A_n = \{id\}$. Supposons par l'absurde de $G \neq \{id\}$. Soit $\sigma \in G \setminus \{id\}$ et soit τ un autre élément de $G \setminus \{id\}$. σ et $\tau \notin A_n$ par hypothèse sur G. $(-1)^{\sigma\tau} = 1$ donc $\sigma\tau \in G \cap A_n = \{id\}$. Ainsi pour tout $\tau \in G \setminus \{id\}$, $\tau = \sigma^{-1}$, par unicité de l'inverse, $G = \{id, \sigma\}$ et σ est d'ordre 2 donc c'est un produit de l transpositions, $l \geq 1$. Or comme G est distingué, il contient tous les produits de l transposition. Il y en a forcément 1 différent de σ, contradiction. $G = \{id\}$. ($\sigma = (a_1\ b_1)...(a_l\ b_l)$, $(a_1\ b_2)(a_2\ b_1)...(a_l\ b_l) \in G$ et est différent de σ)*