Coudert Patrice

Leçon 915 : Classes de complexité. Exemples.

Sipser

Barak..

Papa Dimitriou

23/10/15

I] Présentation

Définition 1 : Machine de Turing

On va travailler sur la machine de Turing suivante $M = (\Gamma, Q, \delta)$ où

Γ contient $\square$ symbole blanc et $\triangleright$ symbole de debut de ruban.

Q contient Q_s état de depart et Q_a état de fin.

$\delta \in Q \times \Gamma \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \Gamma \times \{L, S, R\}^3$ et Q_r ... acceptant, rejettant.

Entrée	$\triangleright$	x_1	...	x_i		x_n	$\square$	$\square$	...
Calcul	$\triangleright$	...	σ_2	...					
Sortie	$\triangleright$	...	σ_3	...					

$\delta(q, x_i, \sigma_2) \Rightarrow (q, \sigma_2', \sigma_3', L, R, S)$

Remarque 2 : On ne fait lire sur le ruban d'entrée. (pas d'écriture).

Remarque 3 : On ne fait qu'écrire sur le ruban de sortie (pas de lecture).

II] Définition des classes

Définition 4 : M **calcule** f en temps $T(n)$ ($T : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$) si il existe C tel que l'éxécution sur l'entrée de taille n s'éxécute en temps au plus $CT(n)$.

Définition 5 : M calcule f en espace $T(n)$ si il existe C tel que l'éxécution sur l'entrée de taille n s'éxécute en espace au plus $CT(n)$ sur le ruban de calcul.

Remarque 6 : Si M calcule f en temps $T(n)$ alors M calcule f en espace $T(n)$.

Définition 7 : DSPACE($S(n)$) est l'ensemble des languages décidables en ~~espace~~ $S(n)$.

Définition 8 : DTIME($S(n)$) est l'ensemble des language décidable en temps $T(n)$.

Théorème 9 : (Speed up théorem)

Définition 10 :
On appelle $P = \bigcup_{c \geq 1} \mathrm{DTIME}(n^c)$.

Exemple 11 : Even : $\{x \in \mathbb{N},\ x \text{ is even}\} \in P$

Définition 12 : $EXP = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathrm{DTIME}(2^{(n^k)})$

Exemple 13 : $SAT \in EXP$

Définition 14 : $PSPACE = \bigcup_{\ell \geq 1} \mathrm{DSPACE}(n^\ell)$

et $L = \mathrm{DSPACE}(\log n)$ $EXPS = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathrm{DSPACE}(2^{n^k})$

Exemple 15 : $SAT \in PSPACE$
et $Add(m, n) \in L$

Proposition 16
$L \subset PSPACE$
et $P \subset Exp$

III] Hiérachie en temps et en espace

Définition 17
Une fonction $t : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tel que $\forall n\ t(n) \geq n \log n$ est time-constructible si la fonction qui à 1^n renvoie $t(n)$ en binaire est calculable en temps $O(t(n))$.

Théorème 18 Time Hierachy Theorem
Pour tout fonction t time-constructible $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$
Il existe un language A tel que
A est décidable en $O(t(n))$ mais A n'est pas décidable en $o(t(n)/\log n)$

Coudert Patrice
Leçon 915 : Classes de complexité. Exemples.

23/10/15

Corollaire 19 : $\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ $n_1 > n_2$

$$DTIME(n^{n_2}) \subsetneq DTIME(n^{n_1})$$

Corollaire 20 :

$$P \subsetneq Exp$$

Définition 21

Une fonction f $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est où $f(n) \geq \log(n), \forall n$ est dite space-contructible si la fonction qui envoie, pour 1^n en entrée, la représentation en binaire de $f(n)$ en espace $O(f(n))$.

Y130

Théorème 22 : (Space hierachy theorem)

Pour tout fonction f space constructible $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$
Il existe A tel que A est décidable en $O(f(n))$ et A n'est pas décidable en $o(f(n))$

Corollaire 23 : $\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ $n_1 < n_2$

$$DSPACE(n^{n_1}) \subsetneq DSPACE(n^{n_2})$$

Corollaire 24 :

$$PSPACE \subsetneq EXPSPACE$$

IV) Machine de Turing non déterministe et certification.

1) Machine de Turing non déterministe

Définition 25 : Un machine de Turing est dite non déterministe si plusieurs transition peuvent être possible.

[illegible] chemins acceptants

Une tel machine nous donne alors des chemins. Un chemin est dit acceptant si la machine s'arrête.

Définition 27 : Une fonction f se calcule en $O(T(n))$ sur une machine de Turing non déterministe si il existe un calchemin acceptant et le calcul de chaque branche se fait en $O(T(n))$.

Définition 28 : $NTIME(t(n))$ est l'ensemble des langages décidables en $O(t(n))$ étapes et $NSPACE$ est l'ensemble des language décidable par des machines de Turing non déterministes en $O(t(n))$ espaces.

Définition 29 $NP = \bigcup_{t \geq 1} NTIME(n^t)$

$NPS = \bigcup_{t \geq 1} NSPACE(n^t)$.

et $NL = NSPACE(\log n)$

2) Acceptation par certificat.

Définition 30 On dit qu'un machine de Turing M déterministe accepte x par certification en temps $t(n)$ si il existe $w \in \Gamma^{t(n)}$ tel que M accepte x, w en temps $t(n)$.

Coudert Patrice

leçon 915 : Classes de complexité. Exemples.

23/10/15

Théorème 31 : L'ensemble des langages acceptable par certification en temps polynomial est NP.

IV] Réductions en tout genre

1) NP-complétude

Définition 32 : B se reduit à A si il existe une fonction f en temps polynomial tel $B \iff f(x) \in A$ notée $B \leq_p A$

Définition 33 NP-complétude
A est NP-complet si $A \in NP$ et $\forall B \in NP$ $B \leq_p A$

Proposition 34 $\{ \langle M \rangle, x, 1^t \mid M$ accepte x en temps $\leq t \}$ est NP-complet.

DV2

Théorème 35 Théorème de Cook-Levin
SAT est NP complet.

2) NL-complétude et PSPACE-complétude

Définition 36 B se reduit à A si il existe f constructible en espace t tel $x \in B \iff f(x) \in A$ noté $B \leq_\ell A$

Définition 37
A est NL-Complet si $A \subset NL$ et $\forall B \in NL$ $B \leq_\ell A$
A est PSPACE-complet si $A \in$ ~~NL~~ PSPACE et $\forall B \in PSPACE$ $B \leq_p A$

Théorème 38 Comparaison temps-espace
$\forall t$ space constructible
$DTIME(t(n)) \subseteq SPACE(t(n)) \subseteq NSPACE(t) \subseteq DTIME(2^{c\, t(n)})$

Hm 32

Théorème 39 :
PATH est NL-complet

DV3

Théorème 40 :
TQBF est PSPACE-complet.