

23/10/15

II] Présentation

Définition 1: Machine de Turing

On se travaille sur la machine de Turing suivante $M = (\Gamma, Q, S)$ où Γ contient 0 symbole blanc et \triangleright symbole de début de ruban.

Q contient q_0 état de départ et q_a état de fin. $S \in Q \times \Gamma \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \Gamma, \delta, S, R, \triangleright$

Exécute

\triangleright	q_0	\dots	q_1	\dots	q_2	\dots	q_3	\dots	q_4	\dots	q_5	\dots	q_6	\dots	q_7	\dots	q_8	\dots	q_9	\dots	q_{10}	\dots	q_{11}	\dots	q_{12}	\dots	q_{13}	\dots	q_{14}	\dots	q_{15}	\dots	q_{16}	\dots	q_{17}	\dots	q_{18}	\dots	q_{19}	\dots	q_{20}	\dots	q_{21}	\dots	q_{22}	\dots	q_{23}	\dots	q_{24}	\dots	q_{25}	\dots	q_{26}	\dots	q_{27}	\dots	q_{28}	\dots	q_{29}	\dots	q_{30}	\dots	q_{31}	\dots	q_{32}	\dots	q_{33}	\dots	q_{34}	\dots	q_{35}	\dots	q_{36}	\dots	q_{37}	\dots	q_{38}	\dots	q_{39}	\dots	q_{40}	\dots	q_{41}	\dots	q_{42}	\dots	q_{43}	\dots	q_{44}	\dots	q_{45}	\dots	q_{46}	\dots	q_{47}	\dots	q_{48}	\dots	q_{49}	\dots	q_{50}	\dots	q_{51}	\dots	q_{52}	\dots	q_{53}	\dots	q_{54}	\dots	q_{55}	\dots	q_{56}	\dots	q_{57}	\dots	q_{58}	\dots	q_{59}	\dots	q_{60}	\dots	q_{61}	\dots	q_{62}	\dots	q_{63}	\dots	q_{64}	\dots	q_{65}	\dots	q_{66}	\dots	q_{67}	\dots	q_{68}	\dots	q_{69}	\dots	q_{70}	\dots	q_{71}	\dots	q_{72}	\dots	q_{73}	\dots	q_{74}	\dots	q_{75}	\dots	q_{76}	\dots	q_{77}	\dots	q_{78}	\dots	q_{79}	\dots	q_{80}	\dots	q_{81}	\dots	q_{82}	\dots	q_{83}	\dots	q_{84}	\dots	q_{85}	\dots	q_{86}	\dots	q_{87}	\dots	q_{88}	\dots	q_{89}	\dots	q_{90}	\dots	q_{91}	\dots	q_{92}	\dots	q_{93}	\dots	q_{94}	\dots	q_{95}	\dots	q_{96}	\dots	q_{97}	\dots	q_{98}	\dots	q_{99}	\dots	q_{100}	\dots	q_{101}	\dots	q_{102}	\dots	q_{103}	\dots	q_{104}	\dots	q_{105}	\dots	q_{106}	\dots	q_{107}	\dots	q_{108}	\dots	q_{109}	\dots	q_{110}	\dots	q_{111}	\dots	q_{112}	\dots	q_{113}	\dots	q_{114}	\dots	q_{115}	\dots	q_{116}	\dots	q_{117}	\dots	q_{118}	\dots	q_{119}	\dots	q_{120}	\dots	q_{121}	\dots	q_{122}	\dots	q_{123}	\dots	q_{124}	\dots	q_{125}	\dots	q_{126}	\dots	q_{127}	\dots	q_{128}	\dots	q_{129}	\dots	q_{130}	\dots	q_{131}	\dots	q_{132}	\dots	q_{133}	\dots	q_{134}	\dots	q_{135}	\dots	q_{136}	\dots	q_{137}	\dots	q_{138}	\dots	q_{139}	\dots	q_{140}	\dots	q_{141}	\dots	q_{142}	\dots	q_{143}	\dots	q_{144}	\dots	q_{145}	\dots	q_{146}	\dots	q_{147}	\dots	q_{148}	\dots	q_{149}	\dots	q_{150}	\dots	q_{151}	\dots	q_{152}	\dots	q_{153}	\dots	q_{154}	\dots	q_{155}	\dots	q_{156}	\dots	q_{157}	\dots	q_{158}	\dots	q_{159}	\dots	q_{160}	\dots	q_{161}	\dots	q_{162}	\dots	q_{163}	\dots	q_{164}	\dots	q_{165}	\dots	q_{166}	\dots	q_{167}	\dots	q_{168}	\dots	q_{169}	\dots	q_{170}	\dots	q_{171}	\dots	q_{172}	\dots	q_{173}	\dots	q_{174}	\dots	q_{175}	\dots	q_{176}	\dots	q_{177}	\dots	q_{178}	\dots	q_{179}	\dots	q_{180}	\dots	q_{181}	\dots	q_{182}	\dots	q_{183}	\dots	q_{184}	\dots	q_{185}	\dots	q_{186}	\dots	q_{187}	\dots	q_{188}	\dots	q_{189}	\dots	q_{190}	\dots	q_{191}	\dots	q_{192}	\dots	q_{193}	\dots	q_{194}	\dots	q_{195}	\dots	q_{196}	\dots	q_{197}	\dots	q_{198}	\dots	q_{199}	\dots	q_{200}	\dots	q_{201}	\dots	q_{202}	\dots	q_{203}	\dots	q_{204}	\dots	q_{205}	\dots	q_{206}	\dots	q_{207}	\dots	q_{208}	\dots	q_{209}	\dots	q_{210}	\dots	q_{211}	\dots	q_{212}	\dots	q_{213}	\dots	q_{214}	\dots	q_{215}	\dots	q_{216}	\dots	q_{217}	\dots	q_{218}	\dots	q_{219}	\dots	q_{220}	\dots	q_{221}	\dots	q_{222}	\dots	q_{223}	\dots	q_{224}	\dots	q_{225}	\dots	q_{226}	\dots	q_{227}	\dots	q_{228}	\dots	q_{229}	\dots	q_{230}	\dots	q_{231}	\dots	q_{232}	\dots	q_{233}	\dots	q_{234}	\dots	q_{235}	\dots	q_{236}	\dots	q_{237}	\dots	q_{238}	\dots	q_{239}	\dots	q_{240}	\dots	q_{241}	\dots	q_{242}	\dots	q_{243}	\dots	q_{244}	\dots	q_{245}	\dots	q_{246}	\dots	q_{247}	\dots	q_{248}	\dots	q_{249}	\dots	q_{250}	\dots	q_{251}	\dots	q_{252}	\dots	q_{253}	\dots	q_{254}	\dots	q_{255}	\dots	q_{256}	\dots	q_{257}	\dots	q_{258}	\dots	q_{259}	\dots	q_{260}	\dots	q_{261}	\dots	q_{262}	\dots	q_{263}	\dots	q_{264}	\dots	q_{265}	\dots	q_{266}	\dots	q_{267}	\dots	q_{268}	\dots	q_{269}	\dots	q_{270}	\dots	q_{271}	\dots	q_{272}	\dots	q_{273}	\dots	q_{274}	\dots	q_{275}	\dots	q_{276}	\dots	q_{277}	\dots	q_{278}	\dots	q_{279}	\dots	q_{280}	\dots	q_{281}	\dots	q_{282}	\dots	q_{283}	\dots	q_{284}	\dots	q_{285}	\dots	q_{286}	\dots	q_{287}	\dots	q_{288}	\dots	q_{289}	\dots	q_{290}	\dots	q_{291}	\dots	q_{292}	\dots	q_{293}	\dots	q_{294}	\dots	q_{295}	\dots	q_{296}	\dots	q_{297}	\dots	q_{298}	\dots	q_{299}	\dots	q_{300}	\dots	q_{301}	\dots	q_{302}	\dots	q_{303}	\dots	q_{304}	\dots	q_{305}	\dots	q_{306}	\dots	q_{307}	\dots	q_{308}	\dots	q_{309}	\dots	q_{310}	\dots	q_{311}	\dots	q_{312}	\dots	q_{313}	\dots	q_{314}	\dots	q_{315}	\dots	q_{316}	\dots	q_{317}	\dots	q_{318}	\dots	q_{319}	\dots	q_{320}	\dots	q_{321}	\dots	q_{322}	\dots	q_{323}	\dots	q_{324}	\dots	q_{325}	\dots	q_{326}	\dots	q_{327}	\dots	q_{328}	\dots	q_{329}	\dots	q_{330}	\dots	q_{331}	\dots	q_{332}	\dots	q_{333}	\dots	q_{334}	\dots	q_{335}	\dots	q_{336}	\dots	q_{337}	\dots	q_{338}	\dots	q_{339}	\dots	q_{340}	\dots	q_{341}	\dots	q_{342}	\dots	q_{343}	\dots	q_{344}	\dots	q_{345}	\dots	q_{346}	\dots	q_{347}	\dots	q_{348}	\dots	q_{349}	\dots	q_{350}	\dots	q_{351}	\dots	q_{352}	\dots	q_{353}	\dots	q_{354}	\dots	q_{355}	\dots	q_{356}	\dots	q_{357}	\dots	q_{358}	\dots	q_{359}	\dots	q_{360}	\dots	q_{361}	\dots	q_{362}	\dots	q_{363}	\dots	q_{364}	\dots	q_{365}	\dots	q_{366}	\dots	q_{367}	\dots	q_{368}	\dots	q_{369}	\dots	q_{370}	\dots	q_{371}	\dots	q_{372}	\dots	q_{373}	\dots	q_{374}	\dots	q_{375}	\dots	q_{376}	\dots	q_{377}	\dots	q_{378}	\dots	q_{379}	\dots	q_{380}	\dots	q_{381}	\dots	q_{382}	\dots	q_{383}	\dots	q_{384}	\dots	q_{385}	\dots	q_{386}	\dots	q_{387}	\dots	q_{388}	\dots	q_{389}	\dots	q_{390}	\dots	q_{391}	\dots	q_{392}	\dots	q_{393}	\dots	q_{394}	\dots	q_{395}	\dots	q_{396}	\dots	q_{397}	\dots	q_{398}	\dots	q_{399}	\dots	q_{400}	\dots	q_{401}	\dots	q_{402}	\dots	q_{403}	\dots	q_{404}	\dots	q_{405}	\dots	q_{406}	\dots	q_{407}	\dots	q_{408}	\dots	q_{409}	\dots	q_{410}	\dots	q_{411}	\dots	q_{412}	\dots	q_{413}	\dots	q_{414}	\dots	q_{415}	\dots	q_{416}	\dots	q_{417}	\dots	q_{418}	\dots	q_{419}	\dots	q_{420}	\dots	q_{421}	\dots	q_{422}	\dots	q_{423}	\dots	q_{424}	\dots	q_{425}	\dots	q_{426}	\dots	q_{427}	\dots	q_{428}	\dots	q_{429}	\dots	q_{430}	\dots	q_{431}	\dots	q_{432}	\dots	q_{433}	\dots	q_{434}	\dots	q_{435}	\dots	q_{436}	\dots	q_{437}	\dots	q_{438}	\dots	q_{439}	\dots	q_{440}	\dots	q_{441}	\dots	q_{442}	\dots	q_{443}	\dots	q_{444}	\dots	q_{445}	\dots	q_{446}	\dots	q_{447}	\dots	q_{448}	\dots	q_{449}	\dots	q_{450}	\dots	q_{451}	\dots	q_{452}	\dots	q_{453}	\dots	q_{454}	\dots
------------------	-------	---------	-------	---------	-------	---------	-------	---------	-------	---------	-------	---------	-------	---------	-------	---------	-------	---------	-------	---------	----------	---------	----------	---------	----------	---------	----------	---------	----------	---------	----------	---------	----------	---------	----------	---------	----------	---------	----------	---------	----------	---------	----------	---------	----------	---------	----------	---------	----------	---------	----------	---------	----------	---------	----------	---------	----------	---------	----------	---------	----------	---------	----------	---------	----------	---------	----------	---------	----------	---------	----------	---------	----------	---------	----------	---------	----------	---------	----------	---------	----------	---------	----------	---------	----------	---------	----------	---------	----------	---------	----------	---------	----------	---------	----------	---------	----------	---------	----------	---------	----------	---------	----------	---------	----------	---------	----------	---------	----------	---------	----------	---------	----------	---------	----------	---------	----------	---------	----------	---------	----------	---------	----------	---------	----------	---------	----------	---------	----------	---------	----------	---------	----------	---------	----------	---------	----------	---------	----------	---------	----------	---------	----------	---------	----------	---------	----------	---------	----------	---------	----------	---------	----------	---------	----------	---------	----------	---------	----------	---------	----------	---------	----------	---------	----------	---------	----------	---------	----------	---------	----------	---------	----------	---------	----------	---------	----------	---------	----------	---------	----------	---------	----------	---------	----------	---------	----------	---------	----------	---------	----------	---------	----------	---------	----------	---------	----------	---------	----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------	-----------	---------

Coudert Patrice
Leçon 9.15: Classes de complexité.
Exemples.

23/10/15

Corollaire 19: $V_{n_1} \cap V_{n_2} \in \text{DTIME}(n^{n_1}) \subseteq \text{DTIME}(n^{n_2})$ $n_1 > n_2$

Corollaire 20:

$$P \subseteq \text{EXP}$$

Définition 21

Une fonction $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est dite $f(n) \geq \log(n)$ si elle est dite espace-combustible si la fonction qui associe pour 1^n en entrée, la représentation binaire de $f(n)$ en espace $O(f(n))$.

Théorème 22: (Space hierarchy theorem)

Pour tout fonction f espace-combustible $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ il existe A tel que A est décidable en $O(f(n))$ et A n'est pas décidable en $o(f(n))$

Corollaire 23: $\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N} \quad n_1 < n_2$

$$\text{DSpace}(n^{n_1}) \subseteq \text{DSpace}(n^{n_2})$$

Corollaire 24:

$$\text{SPACE} \subseteq \text{EXPSPACE}$$

IV Machine de Turing non déterministe et certification.

1) Machine de Turing non déterministe

Définition 25: Une machine de Turing est dite non déterministe si plusieurs transitions peuvent être possibles.

Une tel machine nous donne alors des chemins. Un chemin est dit acceptant si la machine s'arrête.

Définition 27: Une fonction f se calcule en $O(T(n))$ si il existe une machine de Turing non déterministe et le calcul de chaque branche se fait en $O(T(n))$.

Définition 28: $\text{NTIME}(t(n))$ est l'ensemble des langages décidables en $O(t(n))$ étapes et NSPACE est l'ensemble des langages décidables par des machines de Turing non déterministes en $O(t(n))$ espaces.

Définition 29 $\text{NP} = \bigcup_{k \geq 1} \text{NTIME}(n^k)$
 $\text{NPS} = \bigcup_{k \geq 1} \text{NSPACE}(n^k)$
 et $\text{NL} = \text{NSPACE}(\log n)$

3) Acceptation par certificat.

Définition 30 On dit qu'une machine de Turing M déterministe accepte par certification un langage L si il existe un $C \in \mathbb{N}(n)$ tel que M accepte x en temps $t(n)$.

Coudert Patrice

Leçon 315: Classes de complexité.

Exemples.

23/10/18

Théorème 31: L'ensemble des langages acceptables par certification en temps polynomial est NP.

IV) Réductions en tout genre.

1) NP-complétude

Definition 32: B se réduit à A si il existe une fonction en temps polynomial tel $B \Leftrightarrow f(x) \in A$ noté $B \leq_p A$

Definition 33: NP-complétude

A est NP-complet si $A \in NP$ et $\forall B \in NP, B \leq_p A$

Proposition 34: $\langle M \rangle, \leq, \leq^*$ | M-accepte \leq est NP-complet.
 en temps $\leq t$

Théorème 35: Théorème de Cook - Levin
SAT est NP-complet.

2) NL-complétude et PSPACE-complétude

Definition 36: B se réduit à A si il existe f transformable en espace tel $x \in B \Leftrightarrow f(x) \in A$ noté $B \leq_q A$

Definition 37:
A est NL-complet si $ACNL$ et $\forall B \in ACNL, A \leq_{NL} B$
A est PSPACE-complet si $A \in PSPACE$ et $\forall B \in PSPACE, A \leq_{PSPACE} B$

Théorème 38: Comparaison temps-espace
 V_t space constructible

$DTIME(SPACE) \subseteq NSPACE \subseteq DTIME(2^{O(n)})$

Théorème 39:
PATH est NL-complet.
 D/R

Théorème 40:
TQBF est PSPACE-complet.

1/11
32