Théorème de Fenchel-Rockafellar

Achille Méthivier

Définition 1. *Soit E un espace vectoriel réel normé, E' son dual topologique. Soit $\varphi : E \to]-\infty, +\infty]$ tel que φ n'est pas constante égale à $+\infty$. On définit $\varphi^* : E' \to]-\infty, +\infty]$ définie par*

$$\varphi^*(f) = \sup_{x \in E} \big(\langle f, x\rangle - \varphi(x)\big).$$

Théorème 2. *Soient φ, $\psi : E \to]-\infty, +\infty]$ deux fonctions convexes. On suppose qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $\varphi(x_0) < +\infty$, $\psi(x_0) < +\infty$ et φ continue en x_0. Alors*

$$\inf_{x \in E} \big(\varphi(x) + \psi(x)\big) = \sup_{f \in E'} \big(-\varphi^*(-f') - \psi^*(f')\big) = \max_{f \in E'} \big(-\varphi^*(-f') - \psi^*(f')\big).$$

Lemme 3. *Soit $C \subset E$ un ensemble convexe. Alors $\mathring{C}$ est convexe et si $\mathring{C} \neq \varnothing$, alors $\bar{\mathring{C}} = \bar{C}$.*

Démonstration. Soit x, $y \in \mathring{C}$. On dispose de $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset C$ et $B(y, \varepsilon) \subset C$. Soit $t \in]0, 1[$ et posons $z = tx + (1-t)y \in C$, par convexité de C. Alors, pour $a \in E$ tel que $||a|| < \varepsilon$, alors $x - a \in C$ et $y - a \in C$ et on a

$$z - a = t(x - a) + (1 - t)(y - a)$$

donc $z - a \in C$, par convexité de C. Finalement, $B(z, \varepsilon) \subset C$ donc $z \in \mathring{C}$.
Supposons maintenant que $\mathring{C} \neq \varnothing$. Comme l'inclusion $\bar{\mathring{C}} \subset \bar{C}$ est évidente, montrons la réciproque. Soit $x \in \bar{C}$ et $\varepsilon > 0$. Par hypothèse il existe $y \in \mathring{C}$ et on dispose de $z \in B(x, \varepsilon/2) \cap C$. Il existe $\eta > 0$ tel que $B(y, \eta) \subset C$. Pour $t \in [0, 1]$, par convexité de C $tB(y, \eta) + (1 - t)z \subset C$. Or, $tB(y, \eta) = B(ty, t\eta)$, donc $tB(y, \eta) + (1 - t)z = B(ty + (1 - t)z, t\eta)$. Soit $a \in B(ty + (1 - t)z, t\eta)$, alors

$$\begin{aligned} ||z - a|| &= ||(1 - t)z + ty - a + tz - ty|| \\ &\leq ||ty + (1 - t)z - a|| + t(||z|| + ||y||). \end{aligned}$$

Il existe $t > 0$ tel que $t\eta < \varepsilon/4$ et $t(||z|| + ||y||) < \varepsilon/4$. D'après l'inégalité ci-dessus, $a \in B(z, \varepsilon/2)$, donc $a \in B(x, \varepsilon)$ et comme $a \in \mathring{C}$, on a $z \in \bar{\mathring{C}}$. ☐

Démonstration du théorème. Posons $a = \inf_{x \in E} \big(\varphi(x) + \psi(x)\big)$ et $b = \sup_{f \in E'} \big(-\varphi^*(-f') - \psi^*(f')\big)$. Alors $b \leq a$. En effet,

$$-\varphi^*(-f) \leq \langle f, x\rangle + \varphi(x),$$

et

$$\psi^*(f) \leq -\langle f, x\rangle + \psi(x),$$

donc

$$\varphi^*(-f) - \psi^*(f) \leq \varphi(x) + \psi(x).$$

Comme l'inégalité inverse est vérifié pour $a = -\infty$, supposons $a \in \mathbb{R}$ et posons C l'épigraphe de φ. Par définition

$$C = \Big\{(x, \lambda) \in E \times \mathbb{R} : \varphi(x) \leq \lambda\Big\},$$

qui convexe puisque φ l'est. Puisque $\varphi(x_0) < +\infty$ et φ continue en x_0, on dispose de $t \in R$ tel $\varphi(x_0) < t$ est de $(r, \varepsilon) \in (\mathbb{R}_*^+)^2$ tels que

$$\forall x \in B(x_0, r) \quad \varphi(x) \leq t - \varepsilon,$$

donc $(x_0, t) \in \mathring{C}$. Posons $A = \mathring{C}$ convexe non vide d'après le lemme 2, et

$$B = \Big\{(x, \lambda) \in E \times \mathbb{R} : \lambda \leq a - \psi(x)\Big\},$$

aussi convexe et non vide car $\psi(x_0) < +\infty$. Vérifions que A et B sont disjoints. Soit $(x, \lambda) \in A$, on a

$$\lambda > \varphi(x) \geq a - \psi(x),$$

et donc $(x, \lambda) \notin B$. Par le théorème de Hahn-Banach, il existe un hyperplan fermé qui sépare A et B. Par continuité de la forme linéaire définissant H, H sépare aussi $\bar{A}$ et B. Or, d'après le lemme 2, on a $\bar{A} = \bar{C}$. On dispose donc de $f \in E'$, k, $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que l'hyperplan H d'équation $\{\Phi = \alpha\}$, où

$$\Phi(x, \lambda) = \langle f, x\rangle + k\lambda,$$

sépare C et B au sens large.
On a donc

$$\begin{aligned} &\forall (x, \lambda) \in C \quad \langle f, x\rangle + k\lambda \geq \alpha, \\ &\forall (x, \lambda) \in B \quad \langle f, x\rangle + k\lambda \leq \alpha. \end{aligned}$$

Comme $\varphi(x_0) < +\infty$, pour tout $\lambda \geq \varphi(x_0)$ on a $(x_0, \lambda) \in C$. Si $k < 0$, on aurait $f(x_0) + k\lambda \to -\infty$ lorsque $\lambda \to +\infty$ ce qui contredit

$$\forall \lambda \geq \varphi(x_0) \quad \langle f, x\rangle + k\lambda \geq \alpha.$$

Donc $c \geq 0$, montrons même que $c > 0$. Raisonnons par l'absurde et supposons que $k = 0$. Or $\Phi \neq 0$ donc $f \neq 0$. On a alors

$$\forall x \; \varphi(x) < +\infty \quad \langle f, x \rangle \geq \alpha,$$

$$\forall x \; \psi(x) < +\infty \quad \langle f, x \rangle \leq \alpha.$$

Par continuité, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que $B(x_0, \varepsilon_0) \subset \{x \in E : \varphi(x) < +\infty\}$ et donc

$$\forall z \in B(0,1) \quad \langle f, x_0 + \varepsilon_0 z \geq \alpha.$$

Il en résulte que $\langle f, x_0 \rangle \geq \alpha + \varepsilon_0 ||f||$. Par ailleurs, $\psi(x_0) < +\infty$ donc $\langle f, x_0 \rangle \leq \alpha$ et il vient que $\varepsilon_0 ||f|| \leq 0$. Donc $f = 0$, ce qui est absurde.
Ainsi,

$$\varphi^* \left(-\frac{f}{k} \right) \leq -\frac{\alpha}{k},$$

$$\psi^* \left(\frac{f}{k} \right) \leq \frac{\alpha}{k} - a,$$

et donc

$$-\varphi^* \left(-\frac{f}{k} \right) - \psi^* \left(\frac{f}{\alpha} \right) \geq a.$$

Comme par définition de b

$$-\varphi^* \left(-\frac{f}{k} \right) - \psi^* \left(\frac{f}{k} \right) \leq b.$$

On en conclut que

$$a = b = -\varphi^* \left(-\frac{f}{k} \right) - \psi^* \left(\frac{f}{k} \right).$$

$\square$