Image de l'exponentielle matricielle

Jérémie Klingler – Université Lyon 1

Recasages : 153, 156 (peut-être 155)

Références : – *Objectif agrégation*, Beck, Malick & Peyré (Exercice 4.17 page 213)
– *Algèbre & géométrie*, Rombaldi (Lemme 23.1 page 767)

Théorème. Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$. Alors il existe $P \in \mathbf{C}[X]$ tel que $M = \exp(P(M))$.

Corollaire 1. $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbf{C})) = \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$.

Corollaire 2. $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbf{R})) = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}) \mid \exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}),\ A = B^2\}$.

Démonstration du théorème. Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$. On commence par distinguer deux cas :

1. **Supposons M diagonalisable.** Alors il existe $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ telle que $M = Q\,\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)Q^{-1}$, où les (λ_i) sont les valeurs propres de M comptées avec leur multiplicité. Comme M est inversible, les λ_i sont tous non nuls. Ainsi, pour tout $1 \leq i \leq n$, il existe $\mu_i \in \mathbf{C}$ tel que $\lambda_i = \mathrm{e}^{\mu_i}$. Considérons $P \in \mathbf{C}[X]$ le poynôme qui interpole les (λ_i) sur les (μ_i). Alors on a :
$$\begin{aligned} \exp(P(M)) &= Q \exp\begin{pmatrix} P(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & P(\lambda_n)\end{pmatrix} Q^{-1} = Q \exp\begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n\end{pmatrix} Q^{-1} \\ &= Q \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mu_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \mathrm{e}^{\mu_n}\end{pmatrix} Q^{-1} = Q \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix} Q^{-1} = M, \end{aligned}$$
d'où le résultat dans ce cas.

2. **Supposons M unipotente** : il existe donc $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ nilpotente telle que $M = I_n + A$. Considérons $N := \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1}\frac{A^k}{k}$ qui est un polynôme en A et donc en M. On veut montrer que $\exp(N) = M$. On utilise pour cela le lemme suivant :

   Lemme. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ nilpotente et $\varphi : t \in \mathbf{R} \mapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1}\frac{A^k t^k}{k}$. Alors pour tout $t \in \mathbf{R}$, $\mathrm{e}^{\varphi(t)} = I_n + tA$.

   Démonstration du lemme. φ est bien définie et $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$ car A étant nilpotente, la somme est finie. Ainsi, pour $t \in \mathbf{R}$, on a
$$\varphi'(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} A^k t^{k-1} = A \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k t^k A^k = A(I_n + tA)^{-1}.$$
   Ainsi, la fonction $\psi : t \in \mathbf{R} \mapsto \exp(\varphi(t))$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$ de dérivée $\psi'(t) = \varphi'(t)\mathrm{e}^{\varphi(t)} = A(I_n + tA)^{-1}\mathrm{e}^{\varphi(t)}$.
   On en déduit donc que pour $t \in \mathbf{R}$, $(I_n + tA)\psi'(t) = A\mathrm{e}^{\varphi(t)}$. En dérivant une seconde fois cette expression, on aboutit à
$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad A\psi'(t) + (I_n + tA)\psi''(t) = \varphi'(t)A\mathrm{e}^{\varphi(t)} = A\psi'(t),$$
   d'où $(I_n + tA)\psi''(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbf{R}$.
   Soit $t \in \mathbf{R}$. Comme $I_n + tA$ est inversible, on en déduit que $\psi''(t) = 0$. Ainsi, $\psi'(t) = \psi'(0) = A$ et donc $\mathrm{e}^{\varphi(t)} = \psi(t) = tA + \psi(0) = I_n + tA$. □

Le résultat du lemme appliqué à $t = 1$ conduit donc au résultat.

Cas général. Considérons $M = D + N$ la décomposition de Dunford de M. Comme M est inversible, alors D l'est aussi et donc $M = D(I_n + D^{-1}N)$.
Comme D et N commutent et que N est nilpotente, on en déduit que $U := I_n + D^{-1}N$ est unipotente.
D'après ce qui précède, il existe $Q_1, R_1 \in \mathbf{C}[X]$ tels que $D = \exp(Q_1(D))$ et $U = \exp(R_1(U))$.
En outre, D et N sont des polynômes en M donc U est également un polynôme en M : il existe donc $Q_2, R_2 \in \mathbf{C}[X]$ tels que $D = Q_2(M)$ et $U = R_2(M)$. Ainsi, on en déduit par commutativité de $(Q_1 \circ Q_2)(M)$ et $(R_1 \circ R_2)(M)$ que

$$\begin{aligned} M &= DU = \exp(Q_1(D)) \times \exp(R_1(U)) = \exp((Q_1 \circ Q_2)(M)) \times \exp((R_1 \circ R_2)(M)) \\ &= \exp((Q_1 \circ Q_2 + R_1 \circ R_2)(M)), \end{aligned}$$

d'où le résultat dans le cas général.

□

Le corollaire 1 découle directement du théorème.

Démonstration du corollaire 2. Soit $A = \exp(B) \in \exp(\mathcal{M}_n(\mathbf{R}))$.
Alors $A = \exp(B) = \exp(\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}B) = \exp(\frac{1}{2}B)^2$ car $\frac{1}{2}B$ commute avec lui-même.
Réciproquement, soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ telle qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $A = B^2$.
Remarquons que $\det(A) = \det(B)^2 \neq 0$ donc B est inversible. En particulier, $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ donc le théorème assure l'existence de $P \in \mathbf{C}[X]$ tel que $B = \exp(P(B))$.
La conjugaison étant stable par passage à l'exponentielle, on en déduit que, comme $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$,

$$B = \overline{B} = \overline{\exp(P(B))} = \exp(\overline{P}(B)).$$

Ainsi, comme $P(B)$ et $\overline{P}(B)$ commutent, on en déduit :

$$A = B^2 = B\overline{B} = \exp(P(B))\exp(\overline{P}(B)) = \exp((P + \overline{P})(B)).$$

Or $P + \overline{P} \in \mathbf{R}[X]$ donc $(P + \overline{P})(B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, ce qui achève la preuve. □