Théorème du point fixe de Kakutani

Achille Méthivier

Théorème 1. *Soit E un espace euclidien et H un sous-groupe compact de* $\mathrm{GL}(E)$ *et un K une partie non vide, compacte et convexe de E. Supposons que K soit stable par H, i.e. $\forall u \in H\ u(K) \subset K$. Alors il existe $a \in K$ tel que $\forall u \in H\ u(a) = a$.*

Démonstration du théorème. Définissons une application sur V, par $N(x) = \sup_{u \in H} ||u(x)||$. Alors N est une norme strictement convexe sur E. Tout d'abord, à x fixé, par continuité de $u \mapsto ||u(x)||$ et compacité de H, le sup existe et est même atteint. On dispose de $u_x \in H$ tel que $||u_x(x)|| = N(x)$. On a aussi

$$N(x) = 0 \iff ||u_x(x)|| = 0 \iff u_x(x) = 0 \iff x = 0,$$

puisque $u_x \in GL(E)$. On vérifie de même l'homogénéité et l'inégalité triangulaire,

$$N(x+y) = ||u_{x+y}(x+y)|| \leq ||u_{x+y}(x)|| + ||u_{x+y}(y)|| \leq N(x) + N(y).$$

Cela montre par la même occasion que, si $N(x+y) = N(x) + N(y)$ alors

$$||u_{x+y}(x) + u_{x+y}(y)|| = ||u_{x+y}(x)|| + ||u_{x+y}(y)||$$

et comme une norme euclidienne est strictement convexe, il existe $\lambda > 0$ tel que $u_{x+y}(y) = \lambda u_{x+y}(x)$ et donc $y = \lambda x$ par injectivité.
Montrons maintenant qu'il existe un unique a tel que $N(a) = \inf_{x \in K} N(x)$. L'existence est assurée par la continuité de N (norme en dimension finie) et la compacité de K. Soit b tel que $N(b) = N(a)$, alors par convexité de K on a $c = \frac{1}{2}(a+b) \in K$ mais

$$N(c) = N\left(\frac{1}{2}(a+b)\right) \geq N(a) = \frac{N(a) + N(b)}{2},$$

donc $N(a+b) = N(a) + N(b)$. Il existe $\lambda > 0$ tel que $a = \lambda b$ et comme $N(a) = N(b)$ on a nécessairement $\lambda = 1$ et $a = b$.
Il ne reste plus qu'à vérifier que a est point fixe de tous les éléments de H. Soit $u \in H$, comme l'application $v \in H \mapsto v \circ u \in H$ est une permutation du groupe H, on a

$$N(u(a)) = \sup_{v \in H} ||v \circ u(a)|| = \sup_{v \in H} ||v(a)|| = N(a),$$

donc $u(a) = a$ par unicité. □

Application 2. *Soit G un sous-groupe compact de* $\mathrm{GL}(E)$*, alors G est conjugué à un sous-groupe de* $\mathrm{O}(E)$.

Démonstration. On note $\mathscr{S}(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques de E qu'on munit du produit scalaire $\langle u, v\rangle = \mathrm{tr}(u \circ v)$ qui lui confère une structure d'espace euclidien. On regarde le morphismes de groupes suivant

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathrm{GL}(E) & \to & \mathrm{GL}(\mathscr{S}(E)) \\ & u & \mapsto & (v \mapsto u \circ v \circ u^*). \end{array}$$

Alors φ est continue car, pour $u_0, u \in GL(E)$ (muni d'une norme d'algèbre $|| \cdot ||$), on a

$$\begin{aligned} ||u_0 \circ v \circ u_0^* - u \circ v \circ u^*||| &\leq ||u_0 \circ v \circ (u_0 - u)^*|| + ||(u - u_0) \circ v \circ u^*|| \\ &\leq \Big(||u_0|| \cdot ||(u_0 - u)^*|| + ||u^*|| \cdot ||u_0 - u||\Big) ||v||, \end{aligned}$$

donc $|||\varphi(u) - \varphi(u_0)||| \leq ||u_0|| \cdot ||(u_0 - u)^*|| + ||u^*|| \cdot ||u_0 - u||$, et par continuité de l'adjoint, on obtient $|||\varphi(u) - \varphi(u_0)||| \to 0$ quand $u \to u_0$.
L'ensemble $C = \{v \circ v^* : v \in G\} \subset \mathscr{S}(E)$ est compact comme image du compact G par l'application continue $v \mapsto v \circ v^*$. Posons $H = \varphi(G)$, c'est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(\mathscr{S}(E))$, compact puisque φ continue. De plus, l'ensemble C est stable par H. En effet, pour $u, v \in G$,

$$\varphi(u)(v \circ v^*) = u \circ (v \circ v^*) \circ u^* = (u \circ v) \circ (u \circ v)^* \in C,$$

car $u \circ v \in G$. Comme C est contenu dans le convexe $\mathscr{S}^{++}(E)$ (les éléments de C sont symétriques et inversibles) son enveloppe convexe K est encore contenue dans $\mathscr{S}^{++}(E)$. Par linéarité des $\varphi(u)$, pour $u \in G$, K est encore stable par H. De plus, comme C est compact, par le théorème de Carathéodory, K est aussi compact. Par le théorème précédent, il existe $w \in K \subset \mathscr{S}^{++}(E)$ point fixe de tous éléments de H, c'est-à-dire que

$$\forall v \in G \quad \varphi(v)(w) = v \circ w \circ v^* = w.$$

En notant $u \in \mathscr{S}^{++}(E)$ la racine carré de $w = u^2 = u \circ u^*$, on obtient $v \circ u \circ u^* \circ v^* = u \circ u^*$ donc $(u^{-1} \circ v \circ u) \circ (u^{-1} \circ v \circ u)^* = \mathrm{Id}$. Cela dit bien que $u^{-1} \circ v \circ u \in \mathrm{O}(E)$ donc $u^{-1} G u$ est un sous-groupe de $\mathrm{O}(E)$. □

I Références

— Algèbre et Géométrie, Rombaldi (page 163)